UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2018 – 2019
Licence d'économie — Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Recueil d'exercices de TD

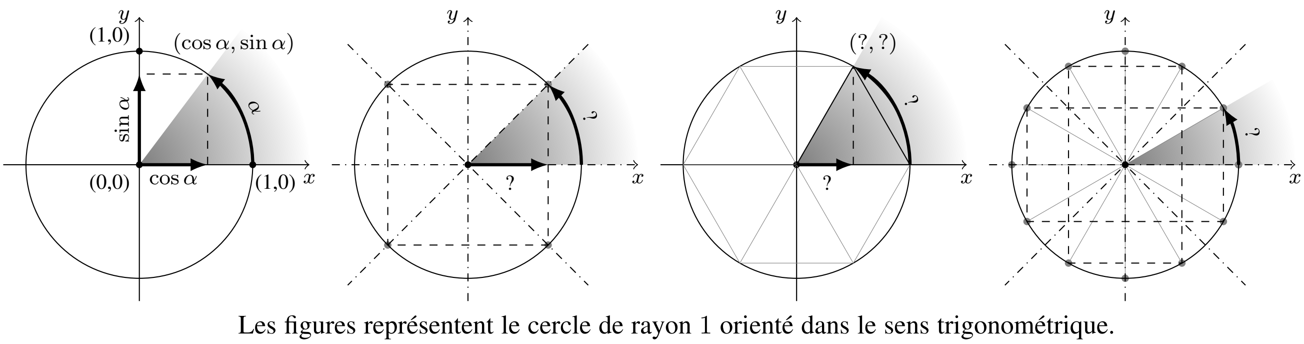
Table des matières

---

1 Séance de révisions

Les exercices de cette séance de révision ont été conçus par M. Luc Miller.

Exercice 1: Rappels de trigonométrie

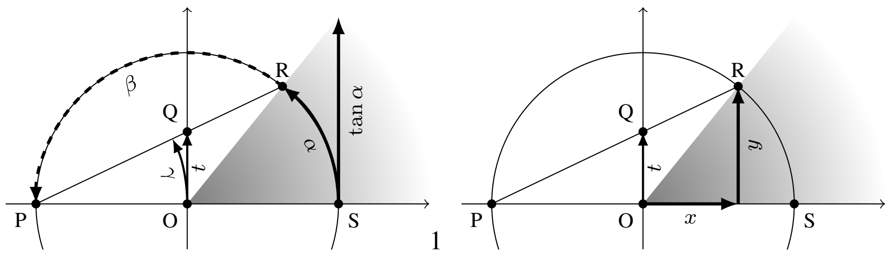


Les figures représentent le cercle de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique. Tout réel α définit un angle, dit « angle α », correspondant au parcours d'une distance $|\alpha|$ autour du cercle à partir du point $(1, 0)$, dans le sens trigonométrique si α est positif, dans le sens des aiguilles des horloges si α est négatif. On dit que α est une mesure de l'angle en radians. Elle n'est définie qu'aux multiples de 2π près.

1. La première figure rappelle la définition du cosinus et du sinus du réel α. Pour un quart de tour, un demi tour, trois quarts de tour et un tour complet, déterminer la mesure $\alpha \in]-\pi, \pi]$ en radians de l'angle, son cosinus et son sinus.
2. Sur la deuxième figure, déterminer la mesure $\alpha \in]-\pi, \pi]$ en radians de l'angle (huitième de tour). Calculer son cosinus et son sinus par symétrie en utilisant le théorème de Pythagore (ou l'équation du cercle). En déduire les coordonnées des quatres points gris et la mesure en radians de leurs angles dans $]-\pi, \pi]$.

3. Sur la troisième figure, déterminer la mesure $\alpha \in]-\pi, \pi]$ en radians de l'angle (sixième de tour). Calculer son cosinus par symétrie, puis son sinus en utilisant le théorème de Pythagore (ou l'équation du cercle).
4. Sur la quatrième figure, déterminer la mesure $\alpha \in]-\pi, \pi]$ en radians de l'angle (douzième de tour). Déduire par symétrie de la réponse à la question précédente les coordonnées des douze points gris et leurs angles.

Exercice 2: Cosinus et sinus en fonction de la tangente de l'angle moitié



On note P et S les points d'intersection du cercle trigonométrique avec l'axe des abscisses (voir figure). Cet exercice paramètre un point quelconque R du cercle trigonométrique par l'ordonnée t du point d'intersection Q de la droite (PR) avec l'axe des ordonnées.

1. Sur la première figure, les angles du triangle OPR en O et P sont β et γ. Cette figure rappelle la définition de la tangente de l'angle α : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite OR avec la verticale en S. Donner une expression de t en fonction de l'angle γ.
2. Quel est l'angle du triangle OPR en R (noter que $OP = OR$ car P et R sont sur le cercle trigonométrique) ? Exprimer γ en fonction de β, puis de α.
3. Sur la seconde figure, exprimer la pente de la droite (PR) en fonction de t d'une part, en fonction de x et y d'autre part. En déduire l'expression de t^2 en fonction de x et y. En déduire x en fonction de t^2, puis y en fonction de t.
4. Déduire des questions précédentes l'expression de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction de $\tan\frac{\alpha}{2}$. *Remarque : ces formules constituent un changement de variable très utile lorsqu'on intègre des fonctions rationnelles de cosinus et de sinus.*

Exercice 3: Approche matricielle des nombres complexes

On considère les matrices 2×2 suivantes : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On identifie les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ à la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2, B^2 et Q^2. Calculer $(B+\lambda N)^2$ et $(P^{-1}QP)^2$ pour tout réel λ et toute matrice inversible P.
2. Montrer qu'il y a une infinité de matrices 2×2 dont le carré vaut la matrice nulle. Sont-elles inversibles ?
3. Montrer qu'il y a une infinité de matrices 2×2 dont le carré vaut la matrice identité I. Sont-elles inversibles ?
4. Montrer qu'il y a une infinité de matrices 2×2 dont le carré vaut $-I$.
5. Calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la rotation d'angle θ. On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ est la matrice représentant la rotation d'angle θ dans cette base. En déduire la relation $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$. *Application :* décrire géométriquement les applications $X \mapsto QX$ et $X \mapsto BX$ en termes de « quart de tour » et « bissectrice ».

Exercice 4: Forme canonique du trinôme du second degré

Dans cet exercice, tous les nombres sont réels. On cherche à factoriser le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

1. Déterminer x_0 et c' tels que $x^2 + bx + c = (x - x_0)^2 + c'$ pour tout x (on dit qu'on a « complété le carré »).
2. Mettre p sous la forme canonique $p(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Exprimer α et β en fonction de a, b et $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. En déduire la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction des paramètres réels $a \neq 0$, b et c.

Exercice 5: Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue

Cet exercice illustre le lien entre l'existence d'une racine r d'un polynôme et sa factorisation par le binôme $x - r$.

1. Factoriser le polynôme $x^2 - r^2$. Identifier un polynôme f de degré deux tel que $x^3 - r^3 = (x - r)f(x)$.
2. Soit $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Déterminer les limites de p quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. En déduire que p admet au moins une racine réelle r. En appliquant la question précédente à $p(x) - p(r)$, montrer qu'il existe un polynôme q de degré deux tel que $p(x) = (x - r)q(x)$.
3. Soit $g(x) = 3x^3 + 8x^2 + 4x - 1$. Calculer $g(-1)$. En déduire toutes les racines du polynôme g.
4. Soit p un polynôme de degré $n \geq 1$ qui admet une racine réelle r. Montrer qu'il existe un polynôme q de degré $n - 1$ tel que $p(x) = (x - r)q(x)$. Indication : pour factoriser $x^n - r^n$, on pourra utiliser la formule de la somme d'une suite géométrique : $1 + q + \cdots + q^{n-1}$, avec $q = \frac{x}{r}$ si $r \neq 0$.

Exercice 6: Dérivées des fonctions trigonométriques

Cet exercice calcule les dérivées des fonctions trigonométriques à partir de leur définition.

1. Déduire des figures de l'exercice 1 pour $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ les deux relations suivantes :
$$\frac{\alpha}{2} = \text{aire du secteur}(ORS) \leq \frac{|y|}{2x}$$
$$(1 - x)^2 + y^2 = (RS)^2 \leq \alpha^2$$
2. En déduire que $\left|\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right| \leq \frac{|\alpha|}{2}$, puis $\cos' 0 = 0 = -\sin 0$ par le théorème des gendarmes.
3. De même, en déduire que $1 \geq \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, puis $\sin' 0 = 1 = \cos 0$ par le théorème des gendarmes.
4. La formule $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta$ de l'exercice 1 montre que les variations des fonctions cosinus et sinus autour de la valeur α dépendent uniquement de la valeur de ces fonctions en α et de leurs variations autour de la valeur 0. En déduire l'expression de $\cos' \alpha$ et $\sin' \alpha$, en fonction de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos' 0$ et $\sin' 0$.
5. En déduire les fonctions dérivées des fonctions sinus, cosinus et tangente.
6. En déduire les fonctions dérivées des fonctions réciproques arcsinus, arccosinus et arctangente.

2 Nombres complexes

Exercice 7: Calcul complexe

7-1) On donne $z = 2 + 3i$ et $z' = 3 + 2i$. Calculer les quantités suivantes :

$$z + z' \,;\quad zz' \,;\quad (zz')^2 \,;\quad z + \bar{z} \,;\quad z\bar{z} \,;\quad |\, z \,|^2 \,;\quad zz' + \bar{z}\bar{z}' \,;\quad \frac{z'}{z} \,;\quad \frac{z}{z'}$$

7-2) Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$$-\sqrt{3}+3i \,;\quad \sqrt{3}+i \,;\quad \frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+i} \,;\qquad 5\sqrt{2}+5i\sqrt{2} \,;\quad -2+2i \,;\qquad \frac{5\sqrt{2}+5i\sqrt{2}}{-2+2i}$$

7-3) Effectuer les produits et quotients suivants :

$$\left(\frac{1}{2}e^{i\pi/6}\right)\times\left(\frac{2}{5}e^{i\pi/3}\right) \,;\qquad \left(\sqrt{2}e^{i\pi/3}\right)\times\left(2\sqrt{2}e^{2i\pi/3}\right) \,;\qquad \left(\sqrt{5}e^{3i\pi/4}\right)\times\left(2\sqrt{5}e^{i\pi/8}\right) \,;$$

$$\frac{e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}} \,;\qquad \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}} \,;\qquad \frac{e^{5i\pi/8}}{3e^{-3i\pi/8}}$$

7-4) Mettre sous la forme $a + ib$, avec a et b réels, les nombres suivants :

$$e^{i\pi/2} \,;\quad \sqrt{2}e^{3i\pi/4} \,;\quad \frac{1+i}{1-i} \,;\quad \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} \,;\quad \frac{2i+1}{(1+i)(1-3i)}$$

Exercice 8

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$1 + i\sqrt{3} \,;\quad -2(\sqrt{3}+i) \,;\quad 1+i \,;\quad (1+i)^2 \,;\quad \frac{\sqrt{3}+i}{-1+i\sqrt{3}}$$

Exercice 9

On considère deux nombres complexes α et β.

9-1) Démontrer la relation suivante :

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$$

9-2) En déduire que

$$\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right| + \left|\alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right| = |\alpha+\beta| + |\alpha-\beta|$$

Exercice 10

En écrivant de deux manières différentes le nombre complexe $\dfrac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}$, déterminer les valeurs de $\cos\left(\pi/12\right)$ et $\sin\left(\pi/12\right)$.

Exercice 11

Pour chacune des équations suivantes :

$$z^2+1=0 \,;\quad z^2-\sqrt{2}z+1=0 \,;\quad z^2+\sqrt{3}z+1=0 \,;\quad z^2-2z\cos\alpha+1=0.$$

11-1) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

11-2) Écrire les racines sous forme trigonométrique et les représenter dans le plan complexe.

11-3) Calculer la puissance n-ième des racines pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

Trouver les nombres complexes dont le carré vaut $3 - 4i$. En déduire les nombres complexes dont le carré vaut $3 + 4i$.

Exercice 13

Soit l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. On note z_1 et z_2 les racines, ρ leur module et θ l'argument de z_1. On considère les suites complexes de la forme $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$, où α et β sont des nombres complexes.

13-1) Montrer que u_n est un nombre réel pour tout entier n si et seulement si $\beta = \bar{\alpha}$.

13-2) Écrire alors u_n sous la forme $\rho^n[A \cos n\theta + B \sin n\theta]$, où A et B sont réels.

13-3) u_n est le terme général d'une suite de nombres réels dont on connaît les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$. Calculer A et B et donner l'expression de u_n.

Exercice 14

14-1) En utilisant la formule de Moivre, trouver des formules pour exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

14-2) En déduire les valeurs algébriques de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 15

On considère l'équation $x^3 = 1$.

15-1) Montrer qu'elle possède une racine réelle et deux racines complexes.

15-2) Montrer que chacune des racines complexes est le carré de l'autre. *Remarque :* on les note traditionnellement j et j^2.

15-3) Calculer la somme et le produit des trois racines.

Exercice 16

L'objectif de cet exercice est de trouver des formules pour calculer les racines d'un polynôme de degré 3. Ces formules sont dues à Girolamo Cardano dans son ouvrage *Ars Magna* publié en 1545.

16-1) Montrer que l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut toujours se ramener à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$ (dite forme réduite). *Indication :* utiliser le changement de variable $x = z - \dfrac{b}{3a}$.

16-2) En posant $z = u + v$ où u et v sont deux nombres complexes, montrer qu'on obtient la relation suivante :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

16-3) En imposant $3uv + p = 0$, calculer les quantités $u^3 + v^3$ et $u^3\,v^3$ en fonction de p et q.

16-4) En déduire les valeurs de u^3 et v^3 en résolvant une équation du second degré qui permet de calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

16-5) En déduire des formules pour les racines z de l'équation réduite. On posera $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right)$ et on discutera en fonction du signe de Δ. *Indication :* ces formules, appelées *formules de Cardan*, utilisent les nombres j et j^2 vus à l'exercice 15.

16-6) Application numérique : résoudre l'équation $x^3 - 18x - 35 = 0$.

Exercice 17

17-1) Montrer que la somme des racines 5èmes de l'unité est nulle.

17-2) En utilisant les formules d'Euler, en déduire la relation

$$1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0.$$

17-3) En se servant de la formule de $\cos(2x)$ trouvée à l'exercice 14, déterminer, à partir de la relation précédente, la valeur algébrique de $\cos(2\pi/5)$ puis celle de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 18

On considère l'équation suivante où x est une inconnue réelle et m un paramètre réel :

$$mx^2 + 3(m-1)x + 3 = 0$$

18-1) Étudier, en fonction des valeurs de m, la nature des racines r_1 et r_2 de cette équation.

18-2) On se place dans le cas des racines réelles. Étudier, en fonction de m, le signe de la somme S et du produit P des racines. En déduire le signe des racines elles-mêmes.

18-3) On se place dans le cas des racines complexes. Étudier leur module en fonction de m.

Exercice 19

Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ dépendant du paramètre réel m :

$$(m-2)\,z^2 - 2\,(m-2)\,z - 1 = 0.$$

19-1) Discuter la nature des racines suivant les valeurs de m.

19-2) Déterminer le signe des racines quand elles sont réelles.

19-3) Calculer le module des racines quand elles sont complexes et montrer que ce module est strictement supérieur à 1.

3 Équations de récurrence

Exercice 20: Équations de récurrence du premier ordre

Déterminer la solution des équations suivantes, et dans chaque cas, préciser son comportement asymptotique.

$$\begin{array}{lll}
u_t - 4u_{t-1} & = 3 & \text{avec } u_0 = 0, \text{ puis } u_0 = -1 \\
4u_t - 3u_{t-1} & = 12\left(\dfrac{3}{4}\right)^t & \text{avec } u_0 = 1 \\
3u_t + 2u_{t-1} & = 10 + 14\left(\dfrac{1}{2}\right)^t & \text{avec } u_0 = 2 \\
u_t - u_{t-1} & = 4t + 3 & \text{avec } u_0 = 1 \\
5u_{t+1} + m\,u_t & = \dfrac{2}{5^t} & \text{avec } u_0 = 12 \text{ et } m \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Exercice 21: Équations de récurrence homogènes du second ordre

Résoudre chacune des équations homogènes suivantes, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des suites solutions puis déterminer la solution particulière vérifiant les conditions initiales indiquées entre parenthèses et préciser son comportement asymptotique :

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} & u_{t+2} - 5\,u_{t+1} + 6\,u_t & = 0 & (u_0 = 1,\ u_1 = 1) \\
\text{b)} & 4u_{t+2} - u_t & = 0 & (u_0 = 3,\ u_1 = 1/2) \\
\text{c)} & u_{t+2} - 2\,u_{t+1} + u_t & = 0 & (u_0 = 1,\ u_1 = 3) \\
\text{d)} & 9u_{t+2} + 6\,u_{t+1} + u_t & = 0 & (u_0 = 3,\ u_1 = -1) \\
\text{e)} & u_{t+2} - 2\sqrt{3}\,u_{t+1} + 4\,u_t & = 0 & (u_0 = 0,\ u_1 = 1) \\
\text{f)} & 2u_{t+2} - 2\,u_{t+1} + u_t & = 0 & (u_0 = 1,\ u_1 = 1)
\end{array}$$

Exercice 22: Équations de récurrence du second ordre avec second membre

Résoudre les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{array}{lll} 6\,u_{t+2} - 5\,u_{t+1} + u_t & = -2t - 3 & (u_0 = 0,\ u_1 = -1) \\ 4\,u_{t+2} - 12\,u_{t+1} + 9\,u_t & = 2^t & (u_0 = 0,\ u_1 = 1) \\ u_{t+2} - 1/2\,u_{t+1} + 1/4u_t & = 3t^2 + 9t + 17 & (u_0 = 16,\ u_1 = 13) \\ 4u_{t+2} - 9u_t & = 36 \times 3^t & (u_0 = -1,\ u_1 = 1) \end{array}$$

Exercice 23

λ et μ étant des nombres réels quelconques, déterminer, pour chacune des suites ci-dessous, une équation de récurrence *homogène du second ordre* dont la suite soit solution :

$$u_t = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^t + \mu\,2^t \qquad u_t = (\lambda + \mu\,t)\,2^t \qquad u_t = \lambda + \mu\,(-3)^t$$

$$u_t = 2^t\left[\lambda\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\,t\right) + \mu\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\,t\right)\right]$$

Exercice 24: Suite de Fibonacci

Une fortune F évolue de mois en mois de la manière suivante : à la fin de chaque chaque mois, elle devient égale à la somme des valeurs des deux mois qui précèdent.

24-1) Trouver une formule pour la valeur F_n de la fortune à la fin du mois n sachant qu'elle vaut initialement 1 (valeurs initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$).

24-2) Comment évolue le taux d'accroissement F_{n+1}/F_n lorsque n tend vers l'infini ?

24-3) Même question avec le taux d'accroissement sur deux mois F_{n+2}/F_n.

Équations dépendant d'un paramètre

Exercice 25

On considère l'équation de récurrence suivante

$$(m+1)u_{t+2} + 2(2m-3)u_{t+1} + (m+1)u_t = (3m-2)(t+3)$$

25-1) Étudier le cas où $m = -1$.

25-2) On suppose désormais que $m \neq -1$. Trouver une solution particulière de l'équation de récurrence.

25-3) Déterminer pour quelles valeurs de m on obtient une solution oscillatoire. Préciser le comportement asymptotique.

25-4) Résoudre l'équation lorsque $m = 1$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.

25-5) Résoudre l'équation lorsque $m = 0$ avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 15/2$.

Exercice 26

On considère l'équation de récurrence homogène suivante dans laquelle α est un paramètre réel :

$$2\,u_{t+2} - 2\,\alpha\,u_{t+1} + \alpha\,u_t = 0$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que les solutions de base de cette équation :

26-1) tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$ (*utiliser les conditions de stabilité*) ;

26-2) présentent des oscillations (trigonométriques) ;

26-3) soient bornées lorsque $t \to +\infty$;

26-4) gardent un signe constant lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 27

Soit m un paramètre réel non nul et l'équation de récurrence :

$$3\,u_{t+2} - (3\,m+1)\,u_{t+1} + m\,u_t = 5 \times 2^t$$

En discutant suivant les valeurs de m :

27-1) Déterminer la solution générale de l'équation.

27-2) Préciser la solution d'équilibre de l'équation, ainsi que la nature de l'équilibre obtenu.

Exercice 28

Soit m un paramètre réel et l'équation de récurrence :

$$2u_{t+2} + m\,u_{t+1} + u_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

En discutant suivant les valeurs de m :

28-1) Déterminer une solution particulière de l'équation.

28-2) Étudier le comportement asymptotique des suites solutions de l'équation.

Équations d'ordre supérieur

Exercice 29: Équations de récurrence d'ordre 3

Résoudre les équations de récurrence d'ordre 3 suivantes :

$$\begin{array}{lll} u_{t+3} - u_{t+2} + u_{t+1} - u_t & = 2 & (u_0 = 3, u_1 = 4, u_2 = 3) \\ 8u_{t+3} - 12u_{t+2} + 6u_{t+1} - u_t & = 1 & (u_0 = 5, u_1 = 7, u_2 = 8) \\ 8u_{t+3} - 8u_{t+2} + 4u_{t+1} - u_t & = 3t + 9 & (u_0 = 7, u_1 = 3, u_2 = 3/2) \end{array}$$

4 Équations différentielles

Équations différentielles linéaires

Exercice 30: Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions solutions puis spécifier celle qui vérifie la condition initiale indiquée :

$$\begin{array}{llllll} y' - 2y & = 7 & \text{avec} & y(0) & = 5 & \\ 2y' + 3y & = 3t & \text{avec} & y(0) & = \dfrac{1}{3} & \\ y' - 3y & = 2e^{-3t} + 1 & \text{avec} & y(0) & = 0 & \\ my' - y & = e^{2t} & \text{avec} & y(0) & = 0 & \text{et} \quad m > 0. \end{array}$$

Exercice 31: Équations d'ordre 1 à coefficients variables

Résoudre les équations différentielles à coefficients variables suivantes :

$$\begin{array}{rcl} y' - 2ty & = & 4t \\ ty' - my & = & \beta t^{\alpha} \\ (t^2 - 1)y' - t^{-1}y & = & m \end{array}$$

Exercice 32: Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Déterminer la solution des équations du second ordre suivantes avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = -1$. Discuter la stabilité des solutions quand t tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} y'' + 3\,y' + 2\,y &= t\,e^{-t} \\ y'' - 4\,y &= 10 \\ y'' - 6\,y' + 9\,y &= -2\,e^{3t} \\ y'' + 2\,y' + 5\,y &= e^{-t} + \sin(2t) \\ 8\,y'' - 4\,y' + 3\,y &= -3\,e^{-t} \end{aligned}$$

Exercice 33

Soit l'équation différentielle dépendant du paramètre réel m

$$(E) \qquad y'' + 4\,y' + m\,y = e^{-2\,t}$$

33-1) Soit (H) l'équation homogène associée et $w(t)$ la solution générale de (H) :
1-a) donner la forme de $w(t)$ suivant les valeurs de m ;
1-b) en déduire une condition nécessaire et suffisante sur m pour que toutes les fonctions vérifiant (H) tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$.
33-2) Suivant les valeurs de m
2-a) déterminer la valeur d'équilibre de (E) ;
2-b) préciser la nature de l'équilibre obtenu.

Exercice 34

Soit l'équation différentielle dépendant du paramètre réel non nul m

$$(E) \qquad m\,y'' + 3\,(m-1)\,y' + 3\,y = 6$$

34-1) Déterminer une solution particulière de (E).
34-2) Quelle est la valeur d'équilibre de (E) ?
34-3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que cet équilibre soit stable (*utiliser les conditions de stabilité*).
34-4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que toutes les solutions de (E) présentent :
a) des oscillations ;
b) des oscillations amorties.

Exercice 35

Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel m, une solution particulière de l'équation

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = t\,e^{m\,t}$$

Donner la solution générale de l'équation et préciser la nature de l'équilibre obtenu.

Exercice 36

λ et μ sont des réels quelconques.
36-1) Pour chacune des fonctions y ci-dessous, déterminer une équation différentielle *homogène du second ordre* dont y soit solution générale :

$$y = \lambda e^{t} + \mu e^{5t} \qquad y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t} \qquad y = e^{2t}\,(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t) \qquad y = \lambda + \mu e^{5t}$$

36-2) Construire des équations différentielles du second ordre avec second membre ayant pour solution générale les fonctions y suivantes

$$y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t} + 3 \qquad y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t} + 2te^{t} \qquad y = \lambda + \mu e^{5t} + t$$

$$y = e^{2t}\,(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t) + 4$$

Exercice 37

Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ linéaire du premier ordre à coefficients variables

$$t\,y'(t) - 3\,y(t) + t^2 = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

37-1) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}_+^\star$.
37-2) Même question sur $\mathbb{R}_-^\star$.
37-3) Quelles sont les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 38

Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ linéaire du premier ordre à coefficients variables

$$\sqrt{|t|}\,y'(t) - y(t) = 1 \qquad (\mathcal{E})$$

38-1) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}_+^\star$.
38-2) Même question sur $\mathbb{R}_-^\star$.
38-3) Montrer que $(\mathcal{E})$ a des solutions sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 39

Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ linéaire du premier ordre à coefficients variables

$$(4 - t^2)\,y'(t) + ty(t) = 2 \qquad (\mathcal{E})$$

39-1) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur les intervalles de $\mathbb{R}$ où le coefficient de $y'(t)$ est de signe constant.
39-2) Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}$.

Méthode de variation de la constante

Exercice 40: Variation de la constante à l'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} t^2y' - y &= 4 \\ \cos(t)y' - \sin(t)y &= t \\ (t^2-1)y' - t^{-1}y &= m \end{aligned}$$

Exercice 41: Variation de la constante à l'ordre 2

Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2

$$y'' + 5y' + 6y = (2t+3)\,e^{-t}$$

par la méthode de variation de la constante.

Équations différentielles non linéaires

Exercice 42: Équations à variables séparables

Résoudre les équations différentielles à variables séparables suivantes :

$$\begin{aligned} y' - t^2 &= t^2\, y \\ y' &= -\frac{t}{y} \\ y' &= y\, \log(t) \\ (t-1)\, y' &= 2\, y \\ (t+1)\, y' &= y^2 \\ \cos(t)\, y' - \sin(t)\, y &= 0 \\ \cos^2(t)\, y' - y &= 0 \\ (1+t^2)\, y' &= \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Exercice 43: Équations à variables homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes au moyen du changement d'inconnue $z = \dfrac{y}{t}$:

$$\begin{aligned} t\, y' &= t - y \\ t\, y' &= y - t \\ t\, y\, y' &= t^2 + y^2 \\ t\, y' - y &= t\,(t+y) \end{aligned}$$

Équations différentielles linéarisables

Les exercices qui suivent portent sur des équations différentielles qui ne sont pas des équations linéaires mais qui peuvent s'y ramener au moyen de changements d'inconnue appropriés. On les qualifie d'équations différentielles linéarisables. *C'est le cas des équations de Bernoulli et de Riccati.*

Les équations de Bernoulli sont des équations différentielles de la forme :

$$a(t)\, y' + b(t)\, y = c(t)\, y^{\alpha}$$

Les équations de Riccati sont des équations différentielles de la forme :

$$y'(t) + a(t)\, y^2(t) + b(t)\, y(t) + c(t) = 0$$

Exercice 44: Linéarisation

44-1) On considère l'équation différentielle linéaire suivante

$$t\, y'(t) = 2\, y(t) \tag{1}$$

Trouver toutes les solutions y de (1) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

44-2) On considère l'équation différentielle

$$t\, y'(t) = 2\, y(t) + 4\, t^4\, e^{2\,t} \tag{2}$$

Trouver une solution particulière de la forme $v(t) = t^2(at+b)\, e^{2\,t}$. En déduire toutes les solutions y de (2) définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

44-3) On considère maintenant l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\, t\, z'(t) = 2\, z(t) + 4\, t^4\, e^{2t} \sqrt{z(t)} \tag{3}$$

Trouver toutes les solutions z de (3) définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et strictement positives.
Indication : on montrera que l'équation (3) se ramène à l'équation (2) par linéarisation au moyen du changement d'inconnue $y = \sqrt{z}$.

Exercice 45: Équation de Bernoulli (1)

Soit l'équation de Bernoulli

$$(t^2 + 1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y} \tag{4}$$

45-1) Trouver toutes les solutions $y > 0$ de (4) définies sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser le changement d'inconnue : $z(t) = \sqrt{y(t)}$.

45-2) Question facultative pour aller plus loin : trouver tous les couples $(t_0,\, y_0)$ tels qu'il existe une solution unique de (4) vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Exercice 46: Équation de Bernoulli (2)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2\, y' + t\, y = 2(\sqrt{t} + 1)\, \sqrt{y} \tag{5}$$

avec $t > 0$.

46-1) Montrer qu'en faisant le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$, on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en z.

46-2) Résoudre l'équation en z par la méthode de variation de la constante.

46-3) En déduire les solutions de l'équation (5).

46-4) Déterminer la solution correspondant à la condition $y(1) = 1$. Quelle est sa limite lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 47: Modèles économiques de type Bernoulli

Les équations différentielles du premier ordre suivantes sont des équations de Bernoulli rencontrées dans des modèles économiques : modèle de Malthus, Bernoulli, Solow, Cobb-Douglas, CES (*Constant Elasticity of Substitution*). On les résoudra en utilisant un changement d'inconnue de la forme $z = y^{1-\alpha}$.

$$\begin{aligned}
y'(t) &= a\, y(t) - b\, y(t)^2 && \text{[Malthus]}\\
y'(t) &= y(t) + \frac{t}{y(t)} && \text{[Bernoulli, } \alpha = -1]\\
y'(t) &= t\Big(y(t) + \frac{1}{y(t)}\Big) && \text{[Bernoulli, } \alpha = -1]\\
y'(t) &= 2\, t\, y(t) - 6\, t^3\, y(t)^2 && \text{[Bernoulli, } \alpha = 2]\\
y'(t) &= s\, y(t)^r - n\, y(t) && \text{[Solow/Cobb-Douglas]}
\end{aligned}$$

Exercice 48: Modèle Solow/CES

Résoudre l'équation différentielle suivante qui constitue le modèle de Solow pour la fonction de production CES (*Constant Elasticity of Substitution*) :

$$y'(t) = s\Big[\big(a^2 - \frac{n}{s}\big)y(t) + 2\, a\, \sqrt{y(t)} + 1\Big]$$

Exercice 49: Équations de Riccati

Les équations différentielles de Riccati ont la forme générale suivante :

$$y'(t) + a(t)\,y^2(t) + b(t)\,y(t) + c(t) = 0$$

49-1) En posant $y(t) = \dfrac{1}{a(t)}\,\dfrac{u'(t)}{u(t)}$, trouver une équation différentielle du second ordre en $u(t)$.

49-2) À l'aide du changement d'inconnue précédent, résoudre les équations différentielles de Riccati suivantes :

$$\begin{array}{lll} y'(t) & = y(t)^2 + m & \text{avec } y(0) = -2 \\ y'(t) & = y(t)^2 - 2/t^2 & \\ y'(t) & = b\,y(t) - a\,y(t)^2 & \text{[Modèle logistique]} \end{array}$$

5 Applications économiques

Exercice 50: Équation de récurrence du second ordre

Y_t représente le revenu national, I_t l'investissement et C_t la consommation de la période t. Le modèle étudié vérifie, à chaque période, les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = C_t + I_t + A \\ C_t = 0,5\,Y_t \\ I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{array} \right.$$

où A et v sont constants, $A > 0$, $v > 0$.

50-1) Donner l'équation de récurrence du second ordre vérifiée par le revenu national.

50-2) Donner la valeur d'équilibre Y_e du revenu national.

50-3) On se propose d'étudier le comportement du revenu national suivant les valeurs du paramètre v.

3-a) Pour quelles valeurs de v le revenu présentera-t-il des fluctuations ?

3-b) Pour quelles valeurs de v les conditions de stabilité sont-elles vérifiées ?

3-c) En utilisant ces deux résultats, donner, selon les valeurs de v, la forme des solutions de l'équation de récurrence et étudier leur comportement asymptotique.

50-4) Donner la solution générale de l'équation de récurrence quand $v = 3/2$. En déduire les solutions correspondant aux conditions initiales $Y_0 = 0$, $Y_1 = 25$ et $A = 25$. Donner une interprétation économique du comportement asymptotique.

50-5) Donner la solution générale de l'équation de récurrence quand $v = 2$.

Exercice 51: Équation différentielle du premier ordre

On considère le marché d'un bien sur lequel se confrontent, à chaque instant t, une offre $S(t)$ et une demande $D(t)$. On désigne par $P(t)$ le prix constaté du bien à l'instant t et par $\widehat{P}(t)$ le prix espéré par les producteurs pour l'instant t. On fait l'hypothèse que le prix s'ajuste selon un niveau qui assure l'équilibre de l'offre et de la demande. On suppose que $S(t)$, $D(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions continues et dérivables de la variable t et que le système est régi par les lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S(t) = a\,\widehat{P}(t) - 20 & a \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ D(t) = -b\,P(t) + 200 & b \in \mathbb{R},\ b > 0 \\ \widehat{P}(t) = P(t) + d\,P'(t) & d \in \mathbb{R}^* \end{array} \right.$$

51-1) Déterminer l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le prix.

51-2) Résoudre cette équation et donner la solution correspondant à un prix initial noté P_0.

51-3) Discuter le comportement asymptotique de ce prix.

51-4) Déterminer la solution correspondant aux valeurs numériques suivantes :

$$a = 3,\ b = 2,\ d = 5/3,\ P_0 = 30$$

.

Exercice 52: Équations différentielles d'ordre 1 et 2

On considère un système économique dans lequel le niveau du revenu national est déterminé par le niveau de la demande globale. En temps continu, ceci est exprimé par la relation suivante :

$$Y'(t) = a\,(D(t) - Y(t))$$

où $Y(t)$ est l'output national au temps t, $D(t)$ la demande globale et a un coefficient de réaction ($a > 0$). On suppose, d'autre part, que la demande globale est fonction du revenu national selon la relation :

$$D(t) = cY(t) + 1$$

où c est la propension marginale à consommer $(0 < c < 1)$.

52-1) Déterminer l'équation différentielle linéaire vérifiée par $Y(t)$ et la résoudre en supposant que $Y(0) = 0$.

52-2) On suppose maintenant que la demande globale est formée de deux parties : l'une provenant des agents économiques privés et l'autre provenant du gouvernement. Si G est la demande effectivement réalisée par le gouvernement, on a désormais

$$D(t) = cY(t) + G(t) + 1$$

Si G^* est la valeur théorique de cette demande, on donne en outre les relations suivantes :

$$\begin{cases} G'(t) = G^*(t) - G(t) \\ G^*(t) = -\frac{1}{8} \times G(t) \end{cases}$$

Déterminer l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par Y et la résoudre avec les données numériques suivantes :

$$a = 2 \quad c = \frac{3}{4} \quad Y(0) = 0 \quad Y'(0) = 2.$$

6 Diagonalisation et systèmes d'équations dynamiques

Les cinq premiers exercices de ce chapitre sont des révisions sur les notions de valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation.

Exercice 53: Valeurs propres imposées

On suppose que la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 7 et 8. Déterminer les valeurs de a et b.

Exercice 54: Matrice carrée et matrice inverse

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

54-1) Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. À quelle valeur propre de A est-il associé ?

54-2) Calculer A^2. Montrer que V est vecteur propre de A^2. À quelle valeur propre de A^2 est-il associé ?

54-3) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Montrer que V est vecteur propre de A^{-1}. À quelle valeur propre de A^{-1} est-il associé ?

Exercice 55: Diagonalisation

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Les diagonaliser dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ quand c'est possible.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 56: Valeurs propres en fonction d'un paramètre

Soit la matrice carrée réelle $A = \begin{pmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{pmatrix}$.

56-1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A a une valeur propre nulle. Donner la seconde valeur propre.

56-2) Pour chaque valeur de m obtenue, déterminer les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

Exercice 57: Matrice transposée

57-1) Soit M une matrice carrée réelle. Comparer les polynômes caractéristiques de M et de ${}^tM$. En déduire que M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres.

57-2) On prend $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer les vecteurs propres de M et de ${}^tM$.

Exercice 58: Puissances de matrices

Reprendre les quatre premières matrices (A_1, A_2, A_3 et A_4) de l'exercice 55 et calculer leur puissance n-ième par diagonalisation.

Exercice 59: Systèmes de suites récurrentes

Pour chacun des systèmes suivants :

1. écrire le système sous forme matricielle $X_{t+1} = M\,X_t$ où $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$;
2. diagonaliser M et calculer M^t (noter que les matrices correspondant à ces systèmes ont déjà été traitées à l'exercice 55 ;
3. résoudre le système.

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{lcl} x_{t+1} & = & 3x_t + y_t \\ y_{t+1} & = & 2x_t + 2y_t \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{lcl} x_{t+1} & = & 2x_t + y_t \\ y_{t+1} & = & -3x_t - 2y_t \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{lcl} x_{t+1} & = & x_t - y_t \\ y_{t+1} & = & 2x_t - y_t \end{array} \right. \qquad (S_4) \left\{ \begin{array}{lcl} x_{t+1} & = & x_t + \sqrt{3}y_t \\ y_{t+1} & = & -\sqrt{3}x_t + y_t \end{array} \right.$$

Exercice 60

Cet exercice revient sur la suite de Fibonacci F_n étudiée à l'exercice 24. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

60-1) Diagonaliser la matrice A.

60-2) Calculer la puissance n-ième A^n de cette matrice.

60-3) Montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

60-4) En déduire l'égalité suivante (appelée *identité de Cassini*) :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

60-5) En utilisant la matrice A^{p+q} (où p et q sont deux nombres entiers), montrer que

$$F_{p+q} = F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q = F_{p+1} F_q + F_p F_{q-1}$$

et que

$$F_{p+q+1} = F_{p+1} F_{q+1} + F_p F_q$$

60-6) En déduire que

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

pour tout entier n.