UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2016 – 2017
L3 Économie — Cours de M. Desgraupes

Mathématiques des Modèles Dynamiques

Examen du 4 Janvier 2016

Durée de l'épreuve : 2H. Les calculettes sont autorisées.

Exercice 1 *(10 points)*

Dans la version simple du modèle de Phillips (1954), les équations de base vérifiées par le revenu national $Y(t)$ (calculé par rapport à un niveau désiré) et la demande totale agrégée $D(t)$ sont :

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha\big(D(t) - Y(t)\big) \\ D(t) = (1-l)\,Y(t) - u \\ u = 1 \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est un coefficient de réaction, $1 - l$ est la propension marginale à consommer du secteur privé ($0 < l < 1$) et u est une perturbation exogène normalisée à 1 pour simplifier les calculs.

1-1) Écrire l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $Y(t)$.

1-2) Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'à la période initiale le revenu est à son niveau désiré, c'est-à-dire $Y(0) = 0$.

1-3) Donner une représentation graphique (pour $t \geq 0$) de la solution trouvée et préciser son comportement asymptotique.

1-4) On introduit maintenant un terme $G(t)$ représentant une politique de stabilisation menée par le gouvernement. Les équations du modèle deviennent alors :

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha\big(D(t) - Y(t)\big) \\ D(t) = (1-l)\,Y(t) + G(t) - 1 \\ G'(t) = \beta\,\big(G^\star(t) - G(t)\big) \\ G^\star(t) = -f\,Y(t) \end{cases}$$

où G est la demande effective du gouvernement et $G^\star$ une demande potentielle supposée ici proportionnelle au revenu global (politique de stabilisation proportionnelle) avec $f > 0$.

Montrer que le revenu vérifie l'équation différentielle suivante :

$$Y'' + (\alpha l + \beta)\,Y' + \alpha\beta(l+f)\,Y = -\alpha\beta \qquad (1)$$

1-5) Trouver une solution particulière de l'équation (1) en fonction de l et f.

1-6) En utilisant les conditions de stabilité, montrer que les solutions de l'équation (1) sont stables. Quel est l'état d'équilibre ? Comparer avec celui obtenu à la question 3.

1-7) Trouver une condition sur f (en fonction des paramètres α, β et l) pour que la solution présente des oscillations.

1-8) Application numérique : résoudre l'équation (1) avec les valeurs suivantes : $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $l = 1/2$, $f = 1/3$ et conditions initiales $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = -3/5$.

Exercice 2 *(4 points)*

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$u'' + 2u' + 2u = mt + 1 \qquad (2)$$

où m est un paramètre réel.

2-1) Trouver, en fonction de m, une solution particulière de l'équation (2).

2-2) On prend $m = -1$. Trouver la solution de l'équation (2) correspondant aux valeurs initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = -1/2$.

2-3) Quel est le comportement asymtotique de la solution ?

Exercice 3 *(6 points)*

Soit l'équation de récurrence définie par

$$6\, u_{t+2} - 5\, u_{t+1} + u_t = 2t + 3 \qquad (3)$$

3-1) Trouver une solution d'équilibre (solution particulière) de l'équation (3).

3-2) Résoudre l'équation complète avec les conditions initiales suivantes :

$$u_0 = u_1 = -1$$

3-3) Étudier le comportement asymptotique de la solution.

3-4) Écrire les conditions de stabilité et vérifier qu'elles correspondent au comportement déterminé à la question précédente.