UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2016 – 2017
L3 Économie — Cours de M. Desgraupes

Mathématiques des Modèles Dynamiques

Correction de l'examen du 4 Janvier 2017

Corrigé ex. 1

Dans la version simple du modèle de Phillips (1954), les équations de base vérifiées par le revenu national $Y(t)$ (calculé par rapport à un niveau désiré) et la demande totale agrégée $D(t)$ sont :

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha\big(D(t) - Y(t)\big) \\ D(t) = (1-l)\,Y(t) - u \\ u = 1 \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est un coefficient de réaction, $1 - l$ est la propension marginale à consommer du secteur privé ($0 < l < 1$) et u est une perturbation exogène normalisée à 1 pour simplifier les calculs.

1-1) Écrire l'équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $Y(t)$.
En substituant l'expression de $D(t)$ dans la première équation, on obtient :

$$\boxed{Y' + \alpha l\, Y = -\alpha}$$

1-2) Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'à la période initiale le revenu est à son niveau désiré, c'est-à-dire $Y(0) = 0$.

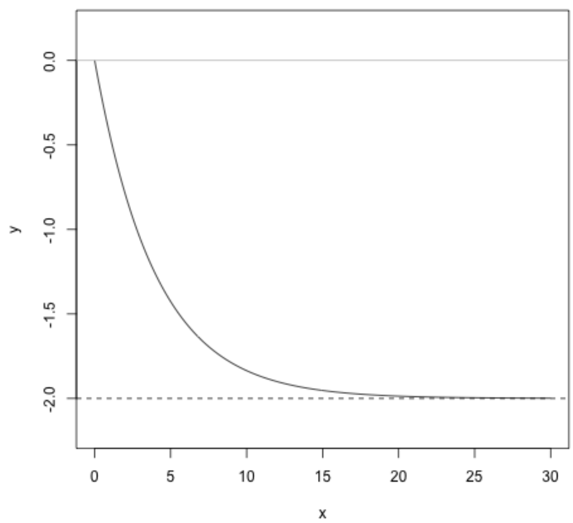
On cherche une solution particulière V constante et on trouve $V = -\frac{1}{l}$. La solution de l'équation homogène est $W = W_0 e^{-\alpha l t}$, d'où finalement :

$$Y(t) = W_0 e^{-\alpha l t} - \frac{1}{l}$$

Compte-tenu de la condition initiale, on trouve :

$$\boxed{Y(t) = -\frac{1}{l}\left(1 - e^{-\alpha l t}\right)}$$

1-3) Donner une représentation graphique (pour $t \geq 0$) de la solution trouvée et préciser son comportement asymptotique.



Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, la fonction tend vers $-\frac{1}{l}$. Autrement dit, la courbe a une asymptote horizontale représentée sur le graphe par la ligne pointillée.

1-4) On introduit maintenant un terme $G(t)$ représentant une politique de stabilisation menée par le gouvernement. Les équations du modèle deviennent alors :

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha\big(D(t) - Y(t)\big) \\ D(t) = (1-l)\,Y(t) + G(t) - 1 \\ G'(t) = \beta\,\big(G^\star(t) - G(t)\big) \\ G^\star(t) = -f\,Y(t) \end{cases}$$

où G est la demande effective du gouvernement et $G^\star$ une demande potentielle supposée ici proportionnelle au revenu global (politique de stabilisation proportionnelle) avec $f > 0$. On suppose aussi que $\beta > 0$.

En substituant l'expression de D dans la première équation, on obtient :

$$Y' = \alpha\big((1-l)Y + G - 1 - Y\big)$$

On en déduit

$$Y' + \alpha l Y + \alpha = \alpha G \tag{1}$$

et donc en dérivant, puis en remplaçant G' par son expression :

$$Y'' + \alpha l Y' = \alpha G' = \alpha\beta\big(G^\star - G\big)$$

On obtient, en remplaçant αG par l'expression trouvée en (1) et $G^\star$ par son expression en fonction de Y :

$$Y'' + \alpha l Y' = \alpha\beta G^\star - \beta\big(Y' + \alpha l Y + \alpha\big) = \alpha\beta f Y - \beta\big(Y' + \alpha l Y + \alpha\big)$$

On regroupe tous les termes en Y dans le membre de gauche, et on trouve l'équation :

$$\boxed{Y'' + (\alpha l + \beta)\,Y' + \alpha\beta(l+f)\,Y = -\alpha\beta} \tag{2}$$

1-5) Trouver une solution particulière de l'équation (2) en fonction de l et f.

On cherche une solution V constante. On trouve facilement :

$$V = -\frac{1}{l+f}$$

1-6) En utilisant les conditions de stabilité, montrer que les solutions de l'équation (2) sont stables. Quel est l'état d'équilibre ? Comparer avec celui obtenu à la question 3.

Les conditions d'équilibre (voir le cours) sont que les coefficients du polynôme caractéristique soient positifs strictement. On obtient ici les conditions :

$$\begin{cases} \alpha l + \beta & > 0 \\ \alpha\beta(l+f) & > 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont vérifiées compte-tenu des conditions sur les paramètres. On a donc un équilibre *stable*. Cet équilibre se fait autour de la solution aprticumlière trouvée à la question précédente.

1-7) Trouver une condition sur f (en fonction des paramètres α, β et l) pour que la solution présente des oscillations.

On cherche à savoir si les racines du polynôme caractéristique :

$$r^2 + (\alpha l + \beta)\, r + \alpha\beta(l+f) = 0$$

sont complexes. On doit donc calculer le discriminant :

$$\Delta = (\alpha l + \beta)^2 - 4\alpha\beta(l+f)$$

Ce discriminant doit être négatif. En le développant, on obtient la relation :

$$4\alpha\beta f > \alpha^2 l^2 - 2\alpha l\beta + \beta^2 = (\alpha l - \beta)^2$$

D'où la condition :

$$\boxed{f > \frac{(\alpha l - \beta)^2}{4\alpha\beta}}$$

1-8) Application numérique : résoudre l'équation (2) avec les valeurs suivantes : $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$, $l = 1/2$, $f = 1/3$ et conditions initiales $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = -3/5$.

Le polynôme caractéristique est $r^2 + r + \frac{5}{16}$. Il admet pour racines $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{4}$.

La solution s'écrit donc

$$Y = e^{-t/2}\big(\lambda_1 \cos(t/4) + \lambda_2 \sin(t/4)\big) - \frac{6}{5}$$

Compte-tenu des conditions initiales, on obtient $\lambda_1 = \frac{6}{5}$ et $\lambda_2 = 0$.

Finalement :

$$\boxed{Y = \frac{6}{5}\left(e^{-t/2}\cos(t/4) - 1\right)}$$

Corrigé ex. 2

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$u'' + 2u' + 2u = mt + 1 \tag{3}$$

où m est un paramètre réel.

2-1) Trouver, en fonction de m, une solution particulière de l'équation (3).

On cherche la solution particulière de la forme $v(t) = at + b$. En substituant dans l'équation, on obtient les relations :

$$\begin{cases} 2a & = m \\ 2a + 2b & = 1 \end{cases}$$

D'où $a = m/2$ et $b = (1 - m)/2$. Finalement, on trouve :

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{2}(mt + 1 - m)}$$

2-2) On prend $m = -1$. Trouver la solution de l'équation (3) correspondant aux valeurs initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = -1/2$.

Le polynôme caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$ qui admet pour deux racines complexes conjuguées : $-1 \pm i$. On a donc les solutions de la forme suivante (en remplaçant aussi m par -1 dans $v(t)$) :

$$u(t) = e^{-t}\big(\lambda \cos t + \mu \sin t\big) - \frac{1}{2}\,t + 1$$

Compte-tenu des conditions initiales, on trouve $\lambda = \mu = 1$. D'où la solution unique :

$$\boxed{u(t) = e^{-t}\big(\cos t + \sin t\big) - \frac{1}{2}\,t + 1}$$

2-3) Quel est le comportement asymtotique de la solution ?

Si $t \longrightarrow +\infty$, l'exponentielle tend vers 0. La solution homogène tend donc vers 0 et l'équilibre autour de la solution particulière est *stable*.

Corrigé ex. 3

Soit l'équation de récurrence définie par

$$6\,u_{t+2} - 5\,u_{t+1} + u_t = 2t + 3 \tag{4}$$

3-1) Trouver une solution d'équilibre (solution particulière) de l'équation (4).

Solution particulière

$$\boxed{v_t = t - 2}$$

3-2) Résoudre l'équation complète avec les conditions initiales suivantes :

$$u_0 = u_1 = -1$$

Les solutions de l'équation caractéristique $6r^2 - 5r + 1 = 0$ sont $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Donc, solution de l'équation complète :

$$\boxed{u_t = \lambda_1 \left(\frac{1}{3}\right)^t + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t + t - 2}$$

Avec les conditions initiales, on obtient $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -2$.

3-3) Comportement asymptotique : la suite $v_t = t - 2$ est considérée comme solution d'équilibre. Les écarts par rapport à l'équilibre sont mesurés par les termes restants qui tendent vers 0 lorsque $t \longrightarrow \infty$. L'équilibre est donc stable.

3-4) Écrire les conditions de stabilité et vérifier qu'elles correspondent au comportement déterminé à la question précédente.

Le polynôme caractéristique est $f(r) = 6r^2 - 5r + 1$.

On calcule $f(1) = 2 > 0$, $f(-1) = 12 > 0$ et on a $b = 1/6 < 1$. Les conditions de stabilité sont bien remplies.