UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2018 – 2019
Licence d'économie — Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé du TD "*Nombres complexes*"

Corrigé ex. 7: calcul complexe

7-1) On pose $z = 2 + 3i$ et $z' = 3 + 2i$ et on calcule :

$$\begin{aligned} z + z' &= 5 + 5\,i \\ zz' &= 13\,i \\ (zz')^2 &= -169 \\ z + \bar{z} &= 4 \\ z\bar{z} &= 13 \\ |z|^2 &= 13 \\ zz' + \bar{z}\bar{z}' &= 0 \\ \frac{z'}{z} &= \frac{12 - 5\,i}{13} \\ \frac{z}{z'} &= \frac{12 + 5\,i}{13} \end{aligned}$$

7-2) Mettre sous forme trigonométrique les nombres suivants :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} + 3i &= 2\sqrt{3}\,e^{\frac{2\,i\,\pi}{3}} \\ \sqrt{3} + i &= 2\,e^{\frac{i\,\pi}{6}} \\ \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + i} &= \sqrt{3}\,e^{\frac{i\,\pi}{2}} \\ 5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2} &= 10\,e^{\frac{i\,\pi}{4}} \\ -2 + 2i &= 2^{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{3\,i\,\pi}{4}} \\ \frac{5\sqrt{2} + 5i\sqrt{2}}{-2 + 2i} &= \frac{5\,e^{-\frac{i\,\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

7-3) Effectuer les produits et quotients suivants :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,e^{i\pi/6} \times \frac{2}{5}\,e^{i\pi/3} &= \frac{1}{5}\,e^{i\pi/2} \\ \sqrt{2}\,e^{i\pi/3} \times 2\sqrt{2}\,e^{2i\pi/3} &= -4 \\ \sqrt{5}\,e^{3i\pi/4} \times 2\sqrt{5}\,e^{i\pi/8} &= 10\,e^{7i\pi/8} \\ \frac{e^{i\pi/3}}{2\,e^{i\pi/4}} &= \frac{1}{2}\,e^{i\pi/12} \\ \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}} &= -i \\ \frac{e^{5i\pi/8}}{3\,e^{-3i\pi/8}} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

7-4) Mettre sous forme algébrique $a+ib$ les nombres suivants :

$$\begin{array}{rcl} e^{i\pi/2} & = & i \\ \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4} & = & -1+i \\ \dfrac{1+i}{1-i} & = & i \\ \dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i} & = & 0 \\ \dfrac{2i+1}{(1+i)(1-3i)} & = & \dfrac{i}{2} \end{array}$$

Corrigé ex. 8: modules et arguments

$$\begin{array}{rcl} 1+i\sqrt{3} & \rightarrow & \rho=2 \quad \theta=\dfrac{\pi}{3} \\ -2(\sqrt{3}+i) & \rightarrow & \rho=4 \quad \theta=-\dfrac{5\pi}{6} \\ 1+i & \rightarrow & \rho=\sqrt{2} \quad \theta=\dfrac{\pi}{4} \\ (1+i)^2 & \rightarrow & \rho=2 \quad \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}+i}{-1+i\sqrt{3}} & \rightarrow & \rho=1 \quad \theta=-\dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

Corrigé ex. 9: modules de la somme et de la différence

On considère deux nombres complexes α et β.

9-1) Démontrer la relation suivante :

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)$$

On utilise la formule $[z|^2=z\,\bar{z}$ pour les deux termes du membre de gauche :

$$\begin{array}{rcl} |\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2 & = & (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})+(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\ & = & \alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta} \\ & = & 2\,\alpha\bar{\alpha}+2\,\beta\bar{\beta} \\ & = & 2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right) \end{array}$$

9-2) En déduire que

$$\left|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right|+\left|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right|=|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|$$

On élève au carré les deux membres de la relation demandée et on applique la relation trouvée à la question précédente.

• Pour le membre de gauche, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\Big(\big|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big|+\big|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big|\Big)^2 &= \big|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big|^2+\big|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big|^2 \\
&+ 2\big|\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big|\big|\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\big| \\
&= 2\Big(|\alpha|^2+|\alpha^2-\beta^2|\Big)+2|\alpha^2-(\alpha^2-\beta^2)| \\
&= 2|\alpha|^2+2|\alpha^2-\beta^2|+2|\beta|^2
\end{aligned}
$$

• Pour le membre de droite, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\Big(|\alpha+\beta|+|\alpha-\beta|\Big)^2 &= \big|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|)^2+2|\alpha+\beta||\alpha-\beta| \\
&= 2\Big(|\alpha|^2+|\beta^2|\Big)+2|\alpha^2-\beta^2| \\
&= 2|\alpha|^2+2|\alpha^2-\beta^2|+2|\beta|^2
\end{aligned}
$$

On a prouvé que le carré du membre de gauche est égal au carré du membre de droite. Pour des raisons évidentes de signe, on en déduit la relation demandée.

Corrigé ex. 10: cosinus et sinus de $\pi/12$

On écrit d'une part :

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}} &= \frac{\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)} \\
&= \frac{1/2+i\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

D'autre part :

$$\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}} = e^{i(\pi/3-\pi/4)} = e^{i\pi/12} = \cos\big(\pi/12\big)+i\sin\big(\pi/12\big)$$

Par identification, on trouve :

$$
\begin{cases}
\cos\big(\pi/12\big) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & (\approx 0.965926) \\
\sin\big(\pi/12\big) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & (\approx 0.258819)
\end{cases}
$$

Corrigé ex. 11: équations du second degré

• Équation $z^2 + 1 = 0$

On trouve $z^2 = -1 = i^2 \quad \Longrightarrow \quad z = \pm i = \pm e^{i\pi/2} = e^{\pm i\pi/2}$.
On en déduit $z^n = e^{\pm i\, n\pi/2}$.

• Équation $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

On trouve $z = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = e^{\pm i\pi/4}$.
On en déduit $z^n = e^{\pm in\pi/4}$.

• Équation $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

On trouve $z = \dfrac{-\sqrt{3} \pm i}{2} = e^{\pm i5\pi/6}$.
On en déduit $z^n = e^{\pm i5n\pi/6}$.

• Équation $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

On trouve $z = \cos\alpha \pm i\, \sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$.
On en déduit $z^n = e^{\pm i\, n\alpha}$.

Corrigé ex. 12: racines carrées complexes

On chercher les nombres complexes z tels que $z^2 = 3 - 4i$.
On pose $z = a + ib$ et on substitue dans l'équation :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 3 - 4i$$

On en déduit que $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = -4$.
Par ailleurs, on peut écrire $a^2 + b^2 = |a + ib|^2 = |(a + ib)^2)| = |3 - 4i| = 5$.
D'où $a = \pm 2$ et $b = \mp 1$. Les solutions sont donc $\boxed{z = \pm(2 - i)}$

Finalement, en remarquant que $\bar{z}^2 = \bar{z^2}$, on en déduit que les racines de $3 + 4i$ seront $z = \pm(2 + i)$.

Corrigé ex. 13: puissances des racines

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \tag{1}$$

13-1) On note z_1 et z_2 les racines de l'équation (1) : elles sont complexes mais, comme l'équation est à coefficients réels, elles sont conjuguées l'une de l'autre, autrement dit on a $z_2 = \bar{z}_1$.

On pose $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n = \alpha z_1^n + \beta \bar{z}_1{}^n$ où α et β sont des nombres complexes.

On sait qu'un nombre est réel si et seulement si il est égal à son conjugué. Le nombre u_n sera donc réel si et seulement si $u_n = \bar{u}_n$. Cela se traduit par la relation

$$\alpha z_1^n + \beta z_2^n = \bar{\alpha}\bar{z}_1^n + \bar{\beta}\bar{z}_2^n$$

On en déduit

$$\alpha z_1^n + \beta \bar{z}_1^n = \bar{\alpha}\bar{z}_1^n + \bar{\beta} z_1^n$$

On peut réécrire cette identité sous la forme

$$(\alpha - \bar{\beta}) z_1^n = (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z}_1^n \tag{2}$$

Cette identité doit être vraie pour tout n. En particulier pour $n = 0$, on obtient

$$(\alpha - \bar{\beta}) = (\bar{\alpha} - \beta)$$

On réécrit alors l'identité (2) en tenant compte de la relation précédente. On obtient :

$$(\alpha - \bar{\beta})(z_1^n - \bar{z}_1^n) = 0$$

Comme cette relation doit être vérifiée quel que soit n, la seule possibilité est que $\alpha - \bar{\beta} = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \bar{\beta}$ ou, de manière équivalente, $\beta = \bar{\alpha}$.

Réciproquement, si $\beta = \bar{\alpha}$, on vérifie facilement que $u_n = \bar{u}_n$.

13-2) On note ρ le module de z_1 et θ son argument : on a donc $z_1 = \rho\, e^{i\theta}$ et, par conséquent, $z_2 = \bar{z}_1 = \rho\, e^{-i\theta}$.

Le terme u_n s'écrit

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha z_1^n + \bar{\alpha}\bar{z}_1{}^n \\ &= \alpha\rho^n\, e^{in\theta} + \bar{\alpha}\rho^n\, e^{-in\theta} \end{aligned}$$

On remplace alors $e^{in\theta}$ par $\cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)$:

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha\rho^n\big(\cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)\big) + \bar{\alpha}\rho^n\big(\cos(n\theta) - i\,\sin(n\theta)\big) \\ &= \rho^n\Big[(\alpha + \bar{\alpha})\cos(n\theta) + i(\alpha - \bar{\alpha})\sin(n\theta)\Big] \end{aligned}$$

L'équation (3) est la relation demandée avec

$$\begin{cases} A = \alpha + \bar{\alpha} = 2\Re(\alpha) \\ B = i(\alpha - \bar{\alpha}) = 2\Im(\alpha) \end{cases}$$

et A et B sont donc des nombres réels.

13-3) Les solutions de l'équation (1) sont $z = 1 \pm i\,\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}$. Donc $\rho = 2$ et $\theta = \pi/3$.

Sachant que les deux premiers termes de la suite sont $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$, on écrit l'équation (3) pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} u_0 = A\cos(0) + B\sin(0) = A = 1 \\ u_1 = 2(A\cos(\pi/3) + B\sin(\pi/3)) = 4 \end{cases}$$

On en déduit les valeurs de A et B : $A = 1$ et $B = \sqrt{3}$.

Finalement, le terme général de la suite u_n s'écrit

$$\boxed{u_n = 2^n\left(\cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\,\sin(n\pi/3)\right)}$$

Corrigé ex. 14: angle $\pi/8$

14-1) En utilisant la formule de Moivre, trouver des formules pour exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

On écrit la formule de Moivre pour $n = 2$:

$$\big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\big)^2 = \cos(2\theta) + i\ \sin(2\theta)$$

En développant le carré dans le membre de gauche, on obtient :

$$\cos^2(\theta) + 2i\ \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) + i\ \sin(2\theta)$$

On identifie les parties réelle et imaginaire entre les deux membres et on obtient les formules demandées :

$$\begin{cases} \cos(2\theta) & = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \sin(2\theta) & = 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

Noter que compte-tenu de la relation $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, la formule de $\cos(2\theta)$ peut aussi s'écrire :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

14-2) En posant $\theta = \pi/8$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\cos(\pi/4) = 2\cos^2(\pi/8) - 1 = 1 - 2\sin^2(\pi/8)$$

On sait que $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Par conséquent, on extrait les carrés des valeurs demandées comme ceci :

$$\begin{cases} \cos^2(\pi/8) & = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} \\ \sin^2(\pi/8) & = \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} \end{cases}$$

Comme le cosinus et le sinus de l'angle $\pi/8$ sont positifs (puisqu'il est compris entre 0 et $\pi/2$), on trouve finalement :

$$\begin{cases} \cos(\pi/8) & = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} \approx 0.9239 \\ \sin(\pi/8) & = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0.3827 \end{cases}$$

Corrigé ex. 15: racines cubiques de l'unité

On considère l'équation $x^3 = 1$.

15-1) On peut factoriser de la manière suivante :

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Cela montre que 1 est racine (c'est la racine réelle). Les deux autres solutions sont les racines du facteur $x^2 + x + 1$ dont le discriminant vaut -3 : elles sont donc complexes.

15-2) Les racines complexes sont les solutions de l'équation $x^2+x+1=0$. Si z est l'une d'elles, on vérifie que z^2 est aussi racine de la manière suivante :

$$(z^2)^2+z^2+1=z^4+z^2+1=z+z^2+1=0$$

en remarquant que $z^4=z^3\times z=1\times z=z$.

Ces deux racines sont notées traditionnellement j et j^2 et sont faciles à calculer comme solutions d'une équation du second degré. On trouve :

$$j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad j^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

15-3) La somme des trois racines est $S=1+j+j^2$ qui est nulle puisque j est solution de l'équation $x^2+x+1=0$.

Le produit vaut $P=1\times j\times j^2=j^3=1$ puisque j est racine de l'équation initiale $x^3=1$.

Corrigé ex. 16: formules de Cardan

16-1) Montrer que l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$ peut toujours se ramener à une équation de la forme $z^3+pz+q=0$.

On pose le changement de variable $x=z-\dfrac{b}{3a}$ et on remplace x dans l'expression $ax^3+bx^2+cx+d=0$:

$$ax^3+bx^2+cx+d \quad = \quad a\left(z-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(z-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(z-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

En développant les deux expressions au cube et au carré et en regroupant les termes, on remarque que les termes en z^2 se simplifient et on obtient l'expression :

$$a\,z^3+c\,z-\frac{b^2\,z}{3\,a}+d-\frac{b\,c}{3\,a}+\frac{2\,b^3}{27\,a^2}=0$$

En divisant par a, on trouve bien une expression de la forme $z^3+pz+q=0$ avec

$$\begin{cases} p &= -\dfrac{b^2}{3a^2}+\dfrac{c}{a} \\ q &= \dfrac{b}{27a}\left(\dfrac{2b^2}{a^2}-\dfrac{9c}{a}\right)+\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Dans toute la suite du problème, on utilisera cette forme réduite.

16-2) On posant $z=u+v$ où u et v sont deux nombres complexes, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} z^3+pz+q &= (u+v)^3+p(u+v)+q \\ &= u^3+3\,u^2\,v+3\,u\,v^2+v^3+v\,p+u\,p+q \\ &= u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q \end{aligned}$$

On a donc la relation :

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0.$$

L'idée de ce changement de variable est d'obtenir une relation avec deux variables (u et v) au lieu d'une seule (z), ce qui va permettre d'imposer une relation supplémentaire.

16-3) On impose la relation $3uv + p = 0$. La relation trouvée à la question précédente se réduit donc à :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^3 + v^3 = -q$$

D'autre part $3uv+p = 0$ conduit à $uv = -p/3$ et par conséquent $u^3\,v^3 = -p^3/27$.

16-4) On a trouvé à la question précédente la somme et le produit des nombres u^3 et v^3 :

$$\begin{cases} S & = u^3 + v^3 = -q \\ P & = u^3\,v^3 = -p^3/27 \end{cases}$$

On est donc ramenés au problème classique de trouver deux nombres (u^3 et v^3) connaissant leur somme S et leur produit P. Ce sont les racines de l'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$. On a donc ici

$$X^2 + qX - p^3/27 = 0$$

Résolvons cette équation du second degré. On calcule d'abord le discriminant :

$$\delta = q^2 + 4p^3/27.$$

Selon le signe du discriminant, les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} u^3 = \dfrac{-q+\sqrt{\delta}}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q-\sqrt{\delta}}{2} & \text{si } \delta \text{ est positif} \\ u^3 = \dfrac{-q+i\sqrt{-\delta}}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \dfrac{-q-i\sqrt{-\delta}}{2} & \text{si } \delta \text{ est négatif} \\ u^3 = v^3 = \dfrac{-q}{2} & \text{si } \delta \text{ est nul} \end{cases}$$

16-5) Ayant trouvé u^3 et v^3, il est facile d'en déduire u et v en utilisant les racines cubiques de l'unité étudiées à l'exercice 15. On en tirera ensuite z puisque $z = u + v$.

On va poser $\Delta = -\left(4p^3 + 27q^2\right) = -\left(2^2p^3 + 3^3q^2\right)$ qui s'appelle le *discriminant* de l'équation du troisième degré et on va discuter en fonction du signe de Δ.

• Si Δ est négatif

L'équation possède alors une solution réelle et deux complexes. On pose

$$\begin{cases} u & = \sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\dfrac{-\Delta}{27}}}{2}} \\ v & = \sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\dfrac{-\Delta}{27}}}{2}} \end{cases}$$

La solution réelle est $z_1 = u + v$ et les deux solutions complexes sont conjuguées l'une de l'autre. On peut les écrire :

$$\begin{cases} z_2 = ju + \bar{j}v = ju + j^2v \\ z_3 = j^2u + \overline{j^2}v = j^2u + jv \end{cases}$$

• Si Δ est nul
Si $p = q = 0$, 0 est solution triple. Sinon p et q sont tous deux non nuls. L'équation possède alors deux solutions réelles, une simple et une double :

$$\begin{cases} z_1 = 2\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}} = \dfrac{3q}{p} \\ z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}} = \dfrac{-3q}{2p} \end{cases}$$

• Si Δ est positif

L'équation a, dans ce cas, trois solutions réelles. En posant $u = \sqrt[3]{\dfrac{-q + i\sqrt{\dfrac{\Delta}{27}}}{2}}$, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1 = u + \bar{u} \\ z_2 = ju + \overline{ju} \\ z_3 = j^2 u + \overline{j^2 u} \end{cases}$$

Remarque : la notation précédente donne l'impression que les solutions sont complexes mais elles sont bien réelles.

16-6) Application numérique : $z^3 - 18z - 35 = 0$.
En appliquant la méthode développée dans les questions précédentes, on trouve $u = 3$ et $v = 2$. Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} z_1 = 5 \\ z_2 = 3j + 2j^2 \\ z_3 = 3j^2 + 2j \end{cases}$$

Corrigé ex. 17: calcul de $\cos(2\pi/5)$

17-1) Si on note z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 les racines 5èmes de l'unité, on a la factorisation :

$$z^5 - 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)$$

Si on développe le produit précédent, le coefficient du terme en z^4 est $-(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$. Comme il est absent du membre de gauche, c'est donc qu'il est nul.

Une autre façon de montrer le résultat est de factoriser sous la forme suivante :

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

et de remarquer que si z est une racine complexe, les autres sont z^2, z^3, z^4. D'autre part 1 est racine évidente. Donc finalement la quantité $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ est la somme des 5 racines.

17-2) Rappelons les formules d'Euler :

$$\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} & = 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & = 2i\sin(\theta) \end{cases}$$

C'est la première qu'on va utiliser ici.
Avec la notation exponentielle $z = e^{i\theta}$, on déduit de $z^5 = e^{5i\theta} = 1$ que $5\theta = 2\pi$. Les quatre racines complexes sont donc $e^{i\,2k\pi/5}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$. En remarquant

qu'elles sont conjuguées deux à deux ($e^{i\,2\pi/5}$ avec $e^{i\,8\pi/5}$ et $e^{i\,4\pi/5}$ avec $e^{i\,6\pi/5}$), on applique la formule d'Euler dans la somme des racines et on obtient la relation :

$$1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) = 0$$

17-3) On a montré dans l'exercice 14 que

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$

Cela permet d'exprimer $\cos(4\pi/5)$ comme ceci :

$$\cos(4\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1$$

En reportant dans la relation de la question précédente, on obtient :

$$1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\big(2\cos^2(2\pi/5) - 1\big) = 0$$

et finalement

$$4\cos^2(2\pi/5) + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0$$

C'est une simple équation du second degré. En la résolvant et en tenant compte du fait que le cosinus cherché doit être positif, on obtient :

$$\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.3090$$

En utilisant à nouveau la formule de $\cos(2\theta)$ avec $\theta = \pi/5$, on trouve ensuite :

$$\cos(\pi/5) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.8090$$

On notant $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, ces formules peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} \cos(2\pi/5) & = \dfrac{1}{2\varphi} \\ \cos(\pi/5) & = \dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

Corrigé ex. 18: racines en fonction d'un paramètre

$$mx^2 + 3(m-1)x + 3 = 0 \tag{3}$$

18-1) La nature (réelle ou complexe) des racines r_1 et r_2 de l'équation (3) est déterminée par le signe du discriminant. On calcule :

$$\Delta = 9(m-1)^2 - 12m = 9m^2 - 18m + 9 - 12m = 3(3m^2 - 10m + 3)$$

Il faut donc étudier le signe de l'expression $3m^2 - 10m + 3$ en fonction des valeurs de m. On vérifie facilement que cette expression est un polynôme de degré 2 qui a pour racines 1/3 et 3. Elle est donc négative pour les valeurs de m situées entre 1/3 et 3.

En conclusion :

— si $1/3 < m < 3$ on aura deux racines complexes conjuguées ;

— si $m < 1/3$ ou $m > 3$, on aura deux racines réelles distinctes ;

— si $m = 1/3$ ou $m = 3$, on aura une racine réelle double.

18-2) On se place dans le cas des racines réelles.

La somme et le produit des racines dans une équation $ax^2+bx+c = 0$ sont donnés par les formules $S = -b/a$ et $P = c/a$. Ici on obtient, si $m \neq 0$:

$$\begin{cases} S &= -3\dfrac{m-1}{m} \\ P &= \dfrac{3}{m} \end{cases}$$

Le produit est positif si et seulement si $m > 0$, ce qui se produit si $0 < m < 1/3$ ou si $m \geq 3$ puisqu'on est dans le cas réel.

La somme est positive si m est compris entre 0 et 1 : cela se réduit donc à l'intervalle $0 < m < 1/3$.

Finalement, on peut en déduire le signe des racines elles-mêmes : lorsque le produit est positif, les racines sont de même signe et ce signe est celui de leur somme. Lorsque le produit est négatif, les racines sont de signes opposés.

Le cas où $m = 0$ doit être traité à part. Dans ce cas, l'équation devient :

$$-3x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Il y a donc une racine unique et elle est positive.

18-3) On se place maintenant dans le cas des racines complexes. Les racines sont conjuguées l'une de l'autre. On a donc :

$$|z|^2 = z\,\bar{z} = P = \frac{3}{m}$$

Puisque $1/3 < m < 3$ (puisqu'on est dans le cas complexe), on en déduit que $\dfrac{3}{m}$ est compris entre 1 et 9 et donc que le module lui-même est compris entre 1 et 3.

Corrigé ex. 19: nature et signe des racines

$$(m-2)\,z^2 - 2\,(m-2)\,z - 1 = 0 \tag{4}$$

19-1) On calcule le discriminant de l'équation (4) :

$$\Delta' = (m-2)^2 + (m-2) = (m-2)(m-1)$$

On en déduit que :

— si $1 < m < 2$ on aura deux racines complexes conjuguées ;

— si $m < 1$ ou $m > 2$, on aura deux racines réelles distinctes ;

— si $m = 1$, on aura une racine réelle double ;

— si $m = 2$, l'équation n'a aucune solution car elle se réduit à $-1 = 0$.

19-2) Comme dans l'exercice précédent, on calcule la somme et le produit des racines :

$$\begin{cases} P &= \dfrac{-1}{m-2} \\ S &= 2 \end{cases}$$

Si $m < 2$, le produit est positif et, puisque la somme est toujours positive, les racines seront positives. Puisqu'on est dans le cas réel, cela se réduit à la condition $m < 1$.

Au contraire, si $m > 2$, le produit est négatif et les deux racines réelles sont de signes opposés.

19-3) On se place maintenant dans le cas des racines complexes. Les racines sont conjuguées l'une de l'autre. On a donc :

$$|z|^2 = z\,\bar{z} = P = \frac{-1}{m-2} = \frac{1}{2-m}$$

Puisque $1 < m < 2$, on en déduit que $0 < 2-m < 1$ et donc $1 < \dfrac{1}{2-m} < +\infty$. On a donc finalement $\boxed{|z|^2 > 1}$.