UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI
Licence d'économie

Année universitaire 2018 – 2019
Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé du TD "*Équations de récurrence*"

Corrigé ex. 20: Équations de récurrence du premier ordre

• Équation $u_t - 4u_{t-1} = 3$

Solution particulière :

$$v_t = -1$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = C\,4^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = C\,4^t - 1$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = 0$:

$$\boxed{u_t = 4^t - 1}$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = -1$:

$$\boxed{u_t = -1}$$

• Équation $4u_t - 3u_{t-1} = 12\left(\frac{3}{4}\right)^t$

Solution particulière :

$$v_t = 3t\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = C\,\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = (3t + C)\,\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = 1$:

$$\boxed{u_t = (3t + 1)\,\left(\frac{3}{4}\right)^t}$$

• Équation $3u_t + 2u_{t-1} = 10 + 14 \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Solution particulière :

$$v_t = 2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = C \left(\frac{-2}{3}\right)^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = 2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^t + C \left(\frac{-2}{3}\right)^t$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = 2$:

$$\boxed{u_t = 2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^t - 2 \left(\frac{-2}{3}\right)^t}$$

• Équation $u_t - u_{t-1} = 4t + 3$

Solution particulière :

$$v_t = t\ (2\,t + 5)$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = C$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = t\ (2\,t + 5) + C$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = 1$:

$$\boxed{u_t = t\ (2\,t + 5) + 1}$$

• Équation $5u_{t+1} + m\ u_t = \frac{2}{5^t}$

On commence par étudier l'équation pour $m \neq -1$.

Solution particulière :

$$v_t = \frac{2}{(m+1)5^t}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = C \left(\frac{-m}{5}\right)^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = \frac{2}{(m+1)5^t} + C \left(\frac{-m}{5}\right)^t$$

Solution de l'équation générale avec $u_0 = 12$:

$$u_t = \boxed{\frac{2}{(m+1)5^t} + \frac{12m+10}{m+1}\left(\frac{-m}{5}\right)^t}$$

On étudie ensuite le cas particulier où $m = -1$. Il faut trouver une solution particulière de la forme $kt/5^t$. On trouve :

$$v_t = \frac{2t}{5^t}$$

On a d'autre part

$$w_t = \frac{C}{5^t}$$

La solution de l'équation générale est donc

$$u_t = v_t + w_t = \frac{2t + C}{5^t}$$

D'où la solution de l'équation générale avec $u_0 = 12$:

$$u_t = \frac{2t + 12}{5^t}$$

Corrigé ex. 21: Équations de récurrence homogènes du second ordre

• Équation $u_{t+2} - 5\,u_{t+1} + 6\,u_t = 0$

Solution générale :

$$u_t = \lambda\,3^t + \mu\,2^t$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 1,\ u_1 = 1$:

$$\boxed{u_t = 2^{t+1} - 3^t}$$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{t\to+\infty} u_t = -\infty$$

• Équation $4u_{t+2} - \ u_t = 0$

Solution générale :

$$u_t = \lambda\left(\frac{-1}{2^t}\right)^t + \frac{\mu}{2^t}$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 3,\ u_1 = 1/2$:

$$\boxed{u_t = \left(\frac{-1}{2}\right)^t + \frac{2}{2^t}}$$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{t\to+\infty} u_t = 0$$

• Équation $u_{t+2} - 2\,u_{t+1} + u_t = 0$

Solution générale :

$$u_t = \mu\,t + \lambda$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 1,\ u_1 = 3$:

$$\boxed{u_t = 2\,t + 1}$$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{t \to +\infty} u_t = +\infty$$

• Équation $9u_{t+2} + 6\,u_{t+1} + \ u_t = 0$

Solution générale :

$$u_t = (\mu\,t + \lambda)\,\left(\frac{-1}{3}\right)^t$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 3,\ u_1 = -1$:

$$\boxed{u_t = 3\,\left(\frac{-1}{3}\right)^t}$$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{t \to +\infty} u_t = 0$$

• Équation $u_{t+2} - 2\sqrt{3}\,u_{t+1} + 4\,u_t = 0$

Le polynôme caractéristique est

$$P(r) = r^2 - 2\,\sqrt{3}\,r + 4 = 0$$

Il a deux racines complexes conjuguées $r = \sqrt{3} \pm i$ dont on cherche le module et l'argument : $\rho = 2$ et $\theta = \pm\pi/6$.

Solution générale :

$$u_t = 2^t\,\left(\lambda\,\cos(\frac{t\pi}{6}) + \mu\,\sin(\frac{t\pi}{6})\right)$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 0,\ u_1 = 1$:

$$\boxed{u_t = 2^t\,\sin(\frac{t\pi}{6})}$$

Comportement asymptotique : l'*amplitude* des oscillations est égale à 2^t et tend donc vers l'infini. On dit qu'on a des oscillations explosives.

• Équation $2u_{t+2} - 2\,u_{t+1} + \ u_t = 0$

Le polynôme caractéristique est

$$P(r) = 2\,r^2 - 2\,r + 1 = 0$$

Il a deux racines complexes conjuguées $r = \dfrac{1 \pm i}{2}$ dont on cherche le module et l'argument : $\rho = \sqrt{2}/2$ et $\theta = \pm\pi/4$.

Solution générale :

$$u_t = \left(\sqrt{2}/2\right)^t \left(\lambda \cos(\frac{t\pi}{4}) + \mu \sin(\frac{t\pi}{4})\right)$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 1,\ u_1 = 1$:

$$\boxed{u_t = \left(\sqrt{2}/2\right)^t \left(\cos(\frac{t\pi}{4}) + \sin(\frac{t\pi}{4})\right)}$$

Comportement asymptotique :

$$\lim_{t \to +\infty} |u_t| = 0$$

Corrigé ex. 22: Équations de récurrence du second ordre avec second membre

---

• Équation $6\,u_{t+2} - 5\,u_{t+1} + u_t = -2t - 3$

Solution particulière :

$$v_t = -t + 2$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = \frac{\lambda}{3^t} + \frac{\mu}{2^t}$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = \frac{\lambda}{3^t} + \frac{\mu}{2^t} - t + 2$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 0,\ u_1 = -1$:

$$\boxed{u_t = -\frac{8}{2^t} + \frac{6}{3^t} - t + 2}$$

• Équation $4\,u_{t+2} - 12\,u_{t+1} + 9\,u_t = 2^t$

Solution particulière :

$$v_t = 2^t$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = (\mu\, t + \lambda)\, \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = (\mu\, t + \lambda)\, \left(\frac{3}{2}\right)^t + 2^t$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 0,\ u_1 = 1$:

$$\boxed{u_t = \left(\frac{t}{3} - 1\right)\left(\frac{3}{2}\right)^t + 2^t}$$

• Équation $u_{t+2} - 1/2\, u_{t+1} + 1/4 u_t = 3t^2 + 9t + 17$

Solution particulière :

$$v_t = 4\,t^2 - 4\,t + 12$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(r) = r^2 - \frac{1}{2}\,r + \frac{1}{4} = 0$$

Il a deux racines complexes conjuguées $r = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$ dont on cherche le module et l'argument : $\rho = 1/2$ et $\theta = \pm\pi/3$.

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\lambda\, \cos(\frac{t\pi}{3}) + \mu\, \sin(\frac{t\pi}{3})\right)$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\lambda\, \cos(\frac{t\pi}{3}) + \mu\, \sin(\frac{t\pi}{3})\right) + 4\,t^2 - 4\,t + 12$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = 16,\ u_1 = 13$:

$$\boxed{u_t = 4\,\left(\frac{1}{2}\right)^t \cos(\frac{t\pi}{3}) + 4\,t^2 - 4\,t + 12}$$

• Équation $4u_{t+2} - 9u_t = 36 \times 3^t$

Solution particulière :

$$v_t = 4 \times 3^{t-1}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w_t = \lambda\,\left(\frac{3}{2}\right)^t + \mu\,\left(\frac{-3}{2}\right)^t$$

Solution de l'équation générale :

$$u_t = v_t + w_t = \lambda\,\left(\frac{3}{2}\right)^t + \mu\,\left(\frac{-3}{2}\right)^t + 4 \times 3^{t-1}$$

Solution de l'équation avec conditions initiales $u_0 = -1,\ u_1 = 1$:

$$\boxed{u_t = -\frac{13}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{t-1} + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)^{t-1} + 4 \times 3^{t-1}}$$

Corrigé ex. 23: Équation vérifiée par une suite

Il faut déterminer, pour chacune des suites ci-dessous, une équation de récurrence *homogène du second ordre* dont elle soit solution.

• Suite $u_t = \lambda\, \left(\frac{1}{2}\right)^t + \mu\, 2^t$

Un polynôme de racines $\frac{1}{2}$ et 2 est :

$$P(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 2) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1$$

La suite vérifie donc l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{u_{t+2} - \frac{5}{2}u_{t+1} + u_t = 0}$$

• Suite $u_t = (\lambda + \mu\, t)\, 2^t$

Un polynôme de racine double 2 est :

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

La suite vérifie donc l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{u_{t+2} - 4u_{t+1} + 4u_t = 0}$$

• Suite $u_t = \lambda + \mu\, (-3)^t$

Un polynôme de racines 1 et -3 est :

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

La suite vérifie donc l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{u_{t+2} + 2u_{t+1} - 3u_t = 0}$$

• Suite $u_t = 2^t \left[\lambda\, \cos\left(\frac{\pi}{4}\, t\right) + \mu\, \sin\left(\frac{\pi}{4}\, t\right)\right]$

Les nombres complexes $z = 2e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ s'écrivent algébriquement $z = \sqrt{2}(1 \pm i)$.
Un polynôme de racines $\sqrt{2}(1-i)$ et $\sqrt{2}(1+i)$ est :

$$P(\lambda) = \left(\lambda - \sqrt{2}(1-i)\right)\left(\lambda - \sqrt{2}(1+i)\right) = \lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 4$$

On peut le voir aussi en vérifiant que la somme des racines est $2\sqrt{2}$ et que le produit des racines est 4.

La suite vérifie donc l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{u_{t+2} - 2\sqrt{2}u_{t+1} + 4u_t = 0}$$

Corrigé ex. 24: Fortune de Fibonacci

24-1) La valeur F_n de la fortune à la fin du mois n égale à la somme des valeurs des deux mois qui précèdent, autrement dit :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

Elle vaut initialement 1, ce qui correspond aux valeurs initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

24-2) On note le taux d'accroissement $T_{n+1} = F_{n+1}/F_n$. En divisant par F_{n-1} dans l'équation (1), on obtient la relation :

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

Si la suite T_n a une limite r lorsque n tend vers l'infini, par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient :

$$r = 1 + \frac{1}{r}$$

et, par conséquent :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Ce n'est autre que le polynôme caractéristique de la suite F_n. La solution positive de cette équation est $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Attention : ceci ne prouve pas que la limite de T_n est r mais simplement que, *si elle existe*, elle vaut r.

Pour montrer que c'est effectivement la limite, on peut simplement résoudre l'équation de récurrence (1). On vérifie facilement que les racines du polynôme caractéristique sont r et $-1/r$ et que, compte-tenu des conditions initiales :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(r^n - \left(-\frac{1}{r} \right)^n \right)$$

Puisque $|1/r| < 1$, F_n est équivalente, lorsque n tend vers l'infini, à $\dfrac{r^n}{\sqrt{5}}$. Par conséquent

$$T_n \sim \frac{r^{n+1}/\sqrt{5}}{r^n/\sqrt{5}} = r$$

Remarque : la quantité $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or*, souvent noté φ.

24-3) On remarque que le taux d'accroissement sur deux mois peut s'écrire

$$\frac{F_{n+2}}{F_n} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \times \frac{F_{n+1}}{F_n} = T_{n+2} \times T_{n+1}$$

On a donc :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_{n+2} \times T_{n+1} = r \times r = r^2.$$

C'est le carré du nombre d'or.

Corrigé ex. 25: Résolution en fonction d'un paramètre

On considère l'équation de récurrence suivante

$$(m+1)u_{t+2} + 2(2m-3)u_{t+1} + (m+1)u_t = (3m-2)(t+3)$$

25-1) Étudier le cas où $m = -1$.

L'équation de récurrence devient

$$-10\, u_{t+1} = -5\ (t+3) \Longleftrightarrow u_{t+1} = \frac{1}{2}\ (t+3)$$

On en déduit que $u_t = \frac{1}{2}\ (t+2)$ pour $t \geq 1$ et u_0 quelconque.

25-2) Désormais $m \neq -1$.

On cherche une solution particulière de l'équation de récurrence sous la forme $v_t = at + b$ et on trouve, lorsque $m \neq \frac{2}{3}$:

$$\boxed{v_t = \frac{t}{2} + 1}$$

Cette solution est indépendante de m. Dans le cas particulier où $m = 2/3$, l'équation devient homogène et par conséquent $v_t = 0$.

25-3) On obtient une solution oscillatoire lorsque le discriminant du polynôme caractéristique est négatif.

$$P(r) = (m+1)\ r^2 + 2\ (2\,m-3)\ r + (m+1)$$

On calcule

$$\Delta' = (2\,m-3)^2 - (m+1)^2 = (m-4)(3m-2)$$

On a donc des oscillations lorsque $m \in]2/3, 4[$.

Comportement asymptotique : le carré du module des racines est égal au produit de ces deux racines (qui sont conjuguées l'une de l'autre). On obtient :

$$|r|^2 = \frac{m+1}{m+1} = 1$$

On a donc des oscillations entretenues.

25-4) Résolution de l'équation lorsque $m = 1$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$. On est dans le cas complexe.

L'équation s'écrit :

$$2\,u_{t+2} - 2\,u_{t+1} + 2\,u_t = t + 3$$

Le polynôme caractéristique est

$$r^2 - r + 1 = 0$$

Il a deux racines complexes conjuguées $r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ dont on cherche le module et l'argument : $\rho = 1$ et $\theta = \pm\pi/3$.

La solution de l'équation homogène est :

$$w_t = \left(\lambda\ \cos(\frac{t\pi}{3}) + \mu\ \sin(\frac{t\pi}{3})\right)$$

La solution générale est :

$$u_t = \lambda\,\cos(\frac{t\pi}{3}) + \mu\,\sin(\frac{t\pi}{3}) + \frac{t}{2} + 1$$

Compte-tenu des conditions initiales, on obtient finalement :

$$\boxed{u_t = -\cos(\frac{t\pi}{3}) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sin(\frac{t\pi}{3}) + \frac{t}{2} + 1}$$

25-5) Résolution de l'équation lorsque $m = 0$ avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 15/2$.
L'équation devient :

$$u_{t+2} - 6\,u_{t+1} + u_t = -2\,(t+3)$$

La solution de l'équation homogène est :

$$w_t = \lambda\,\left(2\sqrt{2}+3\right)^t + \mu\,\left(3-2\sqrt{2}\right)^t$$

La solution générale est :

$$u_t = \lambda\,\left(2\sqrt{2}+3\right)^t + \mu\,\left(3-2\sqrt{2}\right)^t + \frac{t}{2} + 1$$

Compte-tenu des conditions initiales, on obtient finalement :

$$\boxed{u_t = \left(2\sqrt{2}+3\right)^t + \left(3-2\sqrt{2}\right)^t + \frac{t}{2} + 1}$$

Corrigé ex. 26: Discussion de la nature des solutions

$$2\,u_{t+2} - 2\,\alpha\,u_{t+1} + \alpha\,u_t = 0$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = r^2 - \alpha\,r + \frac{1}{2}\alpha$$

26-1) Pour que les solutions tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$, il faut et il suffit que les conditions de stabilité soient remplies :

$$\begin{cases} P(1) = 1 - \alpha + \frac{1}{2}\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha > 0 \\ P(-1) = 1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha = 1 + \frac{3}{2}\alpha > 0 \\ \frac{1}{2}\alpha < 1 \end{cases}$$

La condition est donc $\boxed{-\frac{2}{3} < \alpha < 2}$.

26-2) Pour que les solutions de base présentent des oscillations trigonométriques, il faut et il suffit que le discriminant de P soit strictement négatif :

$$\Delta = \alpha^2 - 4 \times \frac{1}{2}\alpha = \alpha(\alpha - 2) < 0.$$

La condition est $\boxed{0 < \alpha < 2}$.

26-3) Pour que les solutions de base soient bornées lorsque $t \to +\infty$, il faut et il suffit que les racines soient inférieures ou égales à 1 en valeur absolue.

Dans le cas complexe, c'est toujours réalisé car le carré du module vaut $\frac{1}{2}\alpha$ et que justement dans ce cas on a $0 < \alpha < 2$.

Dans le cas réel (c'est-à-dire lorsque $\alpha \leq 0$ ou $\alpha \geq 2$), les racines sont inférieures ou égales à 1 en valeur absolue si et seulement si on a stabilité. En combinant avec l'intervalle trouvé à la première question, on aboutit finalement à $\boxed{-2/3 \leq \alpha \leq 0}$.

26-4) Pour que les solutions de base gardent un signe constant lorsque $t \to +\infty$, il faut et il suffit que les racines soient réelles (c'est-à-dire $\alpha \leq 0$ ou $\alpha \geq 2$) et que leur somme et leur produit soient positifs. La somme des racines est égale à α et le produit à $\alpha/2$: cela élimine le cas où $\alpha \leq 0$ et par conséquent la condition est finalement $\boxed{\alpha \geq 2}$.

Corrigé ex. 27: Équilibre paramétrique

Soit m un paramètre réel non nul et l'équation de récurrence :

$$3\,u_{t+2} - (3\,m + 1)\,u_{t+1} + m\,u_t = 5 \times 2^t$$

27-1) Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = 3\,r^2 + (3\,m + 1)\ r + m$$

dont le discriminant vaut

$$\Delta = (3\,m + 1)^2 - 12m = 9m^2 + 6m + 1 - 12m = 9m^2 - 6m + 1 = (3\,m - 1)^2$$

Les racines sont donc toujours réelles : on trouve $r_1 = \frac{1}{3}$ et $r_2 = m$.

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$w_t = \lambda \left(\frac{1}{3}\right)^t + \mu m^t$$

27-2) La solution d'équilibre est une solution particulière de l'équation de départ. On trouve

$$v_t = -\frac{2^t}{m - 2}$$

La solution générale est finalement :

$$u_t = -\frac{2^t}{m - 2} + \lambda \frac{1}{3^t} + \mu\,m^t$$

L'équilibre est stable si et seulement si la solution homogène w_t tend vers 0 : cela se produit lorsque $\boxed{-1 < m < 1}$.

Corrigé ex. 28: Équation paramétrique

$$2u_{t+2} + m\, u_{t+1} + u_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

28-1) On trouve comme solution particulière de l'équation :

$$v_t = \frac{2}{m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

lorsque $m \neq -3$. Dans le cas particulier où $m = -3$, on trouve :

$$v_t = -2t\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

28-2) Comportement asymptotique des solutions.
Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = 2r^2 + m\,r + 1$$

Les conditions de stabilité s'écrivent donc :

$$\begin{cases} P(1) = 2 + m + 1 = m + 3 > 0 \\ P(-1) = 2 - m + 1 = -m + 3 > 0 \\ \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

Finalement, l'équilibre autour de la solution particulière sera stable lorsque $\boxed{-3 < m < 3}$.

Complément : lorsque $m \neq -3$, la solution générale s'écrit :

$$u_t = \lambda\,\frac{\left(\sqrt{m^2-8}-m\right)^t}{4^t} + \mu\,\frac{\left(-\sqrt{m^2-8}-m\right)^t}{4^t} + \frac{2}{m+3}\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Dans le cas particulier où $m = -3$, on obtient :

$$u_t = \lambda + \mu\left(\frac{1}{2}\right)^t - 2t\left(\frac{1}{2}\right)^t = \lambda + (\mu - 2t)\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Corrigé ex. 29: Équations de récurrence d'ordre 3

Le rincipe de résolution des équations de récurrence d'ordre 3 est le même qu'à l'ordre 2. En particulier, pour résoudre l'équation homogène associée, il faut trouver les racines du polynôme caractéristique. Celui-ci est de degré 3 et aura donc trois racines r_1, r_2 et r_3, distinctes ou confondues.

• Suite $u_{t+3} - u_{t+2} + u_{t+1} - u_t = 2$

Le second membre est constant et on trouve facilement la solution particulière

$$v_t = t + 1$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P(r) = r^3 - r^2 + r - 1 = (r-1)(r^2+1)$$

Ses racines sont donc $r_1 = 1$, $r_2 = i$ et $r_3 = -i$.

La solution de l'équation homogène s'écrit donc :

$$w_t = \lambda + \mu \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right) + \nu \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

On détermine λ, μ et ν au moyen des conditions initiales. Tout calcul fait, on trouve

$$\lambda = 1 \qquad \mu = 1 \qquad \nu = 1$$

La solution est finalement :

$$\boxed{u_t = 1 + \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right) + t + 1}$$

• Suite $8u_{t+3} - 12u_{t+2} + 6u_{t+1} - u_t = 1$

On procède comme dans l'exemple précédent. On trouvera comme solution particulière $v_t = 1$.

Polynôme caractéristique :

$$P(r) = 8r^3 - 12r^2 + 6r - 1 = (2r-1)^3$$

La racine $r = 1/2$ est une racine triple. Par conséquent :

$$w_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\lambda + \mu t + \nu t^2\right)$$

Compte-tenu des conditions initiales dans $u_t = v_t + w_t$, on obtient :

$$\lambda = \mu = \nu = 4$$

et finalement :

$$\boxed{u_t = 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(1 + t + t^2\right) + 1}$$

• Suite $8u_{t+3} - 8u_{t+2} + 4u_{t+1} - u_t = 3t + 9$

On trouvera comme solution particulière $v_t = t - 1$.

Polynôme caractéristique :

$$P(r) = 8r^3 - 8r^2 + 4r - 1 = (2r-1)(4r^2 - 2r + 1)$$

Les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{\pm i\pi/3}$. Par conséquent :

$$w_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\lambda + \mu \cos\left(\frac{t\pi}{3}\right) + \nu \sin\left(\frac{t\pi}{3}\right)\right)$$

Compte-tenu des conditions initiales dans $u_t = v_t + w_t$, on obtient :

$$\lambda = \mu = 4 \qquad \nu = 0$$

et finalement :

$$\boxed{u_t = 4\left(\frac{1}{2}\right)^t \left(1 + \cos\left(\frac{t\pi}{3}\right)\right) + t - 1}$$