UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2018 – 2019
Licence d'économie — Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé du TD "*Applications à l'économie*"

Corrigé ex. 50: Équation de récurrence du second ordre

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + A \\ C_t = 0,5\,Y_t \\ I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{cases}$$

où $A > 0$ et $v > 0$.

50-1) En éliminant C_t et I_t entre les équations, on obtient l'équation de récurrence vérifiée par Y_t :

$$\boxed{Y_t - 2v\,Y_{t-1} + 2v\,Y_{t-2} = 2\,A} \tag{1}$$

50-2) La valeur d'équilibre Y_e du revenu national est la solution particulière constante de l'équation (1). On trouve

$$\boxed{Y_e = 2\,A}$$

50-3) Comportement du revenu national suivant les valeurs du paramètre v.
L'équation caractéristique est

$$P(\lambda) = r^2 - 2vr + 2v = 0 \tag{2}$$

3-a) Pour quelles valeurs de v le revenu présentera-t-il des fluctuations ?
Il y a des oscillation lorsque le discriminant est négatif :

$$\Delta' = v^2 - 2v = v(v-2) < 0$$

Cela se produit lorsque $\boxed{0 < v < 2}$.

3-b) Pour quelles valeurs de v les conditions de stabilité sont-elles vérifiées ?
Les conditions de stabilité s'écrivent :

$$\begin{cases} P(1) = 1 - 2v + 2v = 1 > 0 \\ P(-1) = 1 + 2v + 2v = 1 + 4v > 0 \\ 2v < 1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient (compte-tenu du fait que par hypothèse $v > 0$) :

$$\boxed{0 < v < \frac{1}{2}}$$

3-c) Forme des solutions de l'équation de récurrence.
On distingue le cas réel et le cas complexe.
Si $v > 2$, on a des racines réelles. On trouve, en résolvant l'équation (2) :

$$\begin{cases} r_1 = & v - \sqrt{v^2 - 2v} \\ r_2 = & v + \sqrt{v^2 - 2v} \end{cases}$$

La solution s'écrit dans ce cas :

$$Y_y = k_1\, r_1^t + k_2\, r_2^t + 2A$$

La condition de stabilité trouvée à la question précédente implique que l'équilibre est ici instable.

Si on a $v < 2$, la solution de l'équation (2) est complexe. Si on la met sous la forme $z = \rho\, e^{i\theta}$, la solution de l'équation de récurrence aura la forme :

$$Y_t = \rho^t\ \left(k_1 \cos(t\theta) + k_2 \sin(t\theta)\right) + 2A$$

D'après la question précédente, l'équilibre sera stable si $0 < v < \frac{1}{2}$ et instable si $\frac{1}{2} \leq v < 2$.

Pour terminer, dans le cas où $v = 2$, on obtient une racine double dans l'équation (2) et le revenu s'écrit

$$Y_t = (k_1 + k_2 t) \times 2^t + 2A$$

L'équilibre est ici instable.

50-4) On suppose que $v = 3/2$.

Les solutions de l'équation (2) sont

$$r = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} e^{i\pi/6}$$

La solution générale de l'équation (1) s'écrit

$$Y_t = \left(\sqrt{3}\right)^t \left(\lambda\, \cos(\frac{t\pi}{6}) + \mu\, \sin(\frac{t\pi}{6})\right) + 2A$$

Avec les conditions initiales $Y_0 = 0$, $Y_1 = 25$ et $A = 25$, on trouve finalement :

$$\boxed{Y_t = \left(\sqrt{3}\right)^t \left(-50\, \cos(\frac{t\pi}{6}) + \frac{100}{\sqrt{3}}\, \sin(\frac{t\pi}{6})\right) + 50}$$

50-5) On suppose maintenant que $v = 2$. On a trouvé précédemment que dans ce cas :

$$Y_t = (k_1 + k_2 t) \times 2^t + 2A$$

Avec les même conditions initiales que précédemment, on obtient :

$$\boxed{Y_t = \left(\frac{75}{2} t - 50\right) \times 2^t + 50}$$

Corrigé ex. 51: Ajustement entre l'offre et la demande

$$\begin{cases} S(t) = a\, \widehat{P}(t) - 20 & a \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ D(t) = -b\, P(t) + 200 & b \in \mathbb{R},\ b > 0 \\ \widehat{P}(t) = P(t) + d\, P'(t) & d \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

51-1) L'hypothèse d'ajustement de l'offre et la demande se traduit par la relation $S(t) = D(t)$. Par élimination au moyen des équations du modèle, on obtient :

$$\boxed{ad\, P'(t) + (a+b)\, P(t) = 220} \tag{3}$$

51-2) L'équation (3) est une équation différentielle d'ordre 1.
La solution générale est :

$$P(t) = \frac{220}{b+a} + C\, e^{-\frac{(b+a)\,t}{a\,d}}$$

La solution correspondant à un prix initial P_0 est :

$$\boxed{P(t) = \frac{220}{b+a} + \left(P_0 - \frac{220}{b+a}\right)\, e^{-\frac{(b+a)\,t}{a\,d}}}$$

51-3) Comportement asymptotique du prix.
Les nombres a et b étant strictement positifs par hypothèse, le comportement de l'exponentielle dépend du signe de d.
Si $d > 0$, le prix $P(t)$ rejoint le prix d'équilibre $\dfrac{220}{b+a}$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.
Si $d < 0$, l'exponentielle est divergente et le prix s'écarte de plus en plus du prix d'équilibre : l'équilibre est alors instable.

51-4) On suppose que $a = 3,\ b = 2,\ d = 5/3,\ P_0 = 30$.
On obtient la solution :

$$\boxed{P(t) = 44 - 14\, e^{-t}}$$

Corrigé ex. 52: Intervention du gouvernement

$$\begin{cases} Y'(t) = a\,(D(t) - Y(t)) \\ D(t) = cY(t) + 1 \end{cases} \tag{4}$$

avec $a > 0$ et $(0 < c < 1)$.

52-1) En éliminant $D(t)$ entre les équations su système (4), on obtient l'équation suivante :

$$Y'(t) - a(c-1)\,Y(t) = a \tag{5}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 dont la solution s'écrit :

$$Y(t) = \frac{1}{1-c} + K\, e^{-a(1-c)t}$$

La solution correspondant à $Y(0) = 0$ s'écrit :

$$\boxed{Y(t) = \frac{1}{1-c}\,\left(1 - \ e^{-a(1-c)t}\right)}$$

52-2) On ajoute des équations qui introduisent la demande G effectivement réalisée par le gouvernement. Les équations du modèle sont désormais :

$$\begin{cases} Y'(t) = a\,(D(t) - Y(t)) \\ D(t) = cY(t) + G(t) + 1 \\ G'(t) = G^*(t) - G(t) \\ G^*(t) = -\frac{1}{8} \times G(t) \end{cases} \tag{6}$$

Les deux premières équations du système (6) conduisent, par élimination de $D(t)$, à la relation suivante :

$$Y'(t) = a(c-1)\,Y(t) + a\,G(t) + a$$

On en extrait la fonction $G(t)$ en fonction de $Y(t)$:

$$G(t) = \frac{1}{a}\,Y'(t) + (1-c)\,Y(t) - 1 \tag{7}$$

Les deux dernières équations du système (6) conduisent à

$$G'(t) = -\frac{1}{8}\,G(t) - G(t) = -\frac{9}{8}\,G(t)$$

En remplaçant $G(t)$ par l'expression trouvée dans la relation (7), on obtient :

$$\frac{1}{a}\,Y''(t) + (1-c)\,Y'(t) = -\frac{9}{8}\left(\frac{1}{a}\,Y'(t) + (1-c)\,Y(t) - 1\right)$$

L'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par $Y(t)$ est finalement :

$$\boxed{Y'' + \left[a(1-c) + \frac{9}{8}\right]\,Y' + \frac{9}{8}a(1-c)\,Y = \frac{9}{8}a} \tag{8}$$

Avec les valeurs numériques suivantes $a = 2 \quad c = \frac{3}{4} \quad Y(0) = 0 \quad Y'(0) = 2$, l'équation devient :

$$\boxed{Y'' + \frac{13}{8}\,Y' + \frac{9}{16}\,Y = \frac{9}{4}} \tag{9}$$

Une solution particulière est la fonction constante $v(t) = 4$.
Le polynôme caractéristique associé est

$$r^2 + \frac{13}{8}\,r + \frac{9}{16} = 0$$

Il y a deux racines réelles $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = -\frac{9}{8}$. On trouve donc la solution générale suivante :

$$Y(t) = k_1\,e^{-\frac{t}{2}} + k_2\,e^{-\frac{9t}{8}} + 4$$

Compte-tenu des conditions initiales $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = 2$, on obtient finalement :

$$\boxed{Y(t) = 4 - 4\,e^{-\frac{t}{2}}}$$