UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2018 – 2019
Licence d'économie — Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé du TD "*Diagonalisation et systèmes d'équations dynamiques*"

Corrigé ex. 53: Valeurs propres imposées

La matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 7 et 8.

La trace et le déterminant de M sont respectivement la somme et le produit des valeurs propres. On obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(M) = 4 + b = \lambda_1 + \lambda_2 = 7 + 8 = 15 \\ \det(M) = 4b - 2a = \lambda_1 \lambda_2 = 7 \times 8 = 56 \end{cases}$$

On en déduit que $b = 11$ et, par conséquent, $a = -6$.

Corrigé ex. 54: Matrice carrée et matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

54-1) On considère $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on calcule :

$$AV = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6V$$

Puisque $AV = 6V$, le vecteur V est vecteur propre de A pour la valeur propre 6.

54-2) On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -14 \\ -14 & 29 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^2 V = \begin{pmatrix} 8 & -14 \\ -14 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -72 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 36V$$

Il en résulte que V est vecteur propre de A^2 pour valeur propre $36 = 6^2$.

54-3) A est inversible car son déterminant vaut 6 et est donc non nul.
L'inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} V$$

V est vecteur propre de A^{-1} pour valeur propre $\dfrac{1}{6}$.

Corrigé ex. 55: Diagonalisation

• Matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda - 4)\ (\lambda - 1)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

• Matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\ (\lambda + 1)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\,\lambda - 10 = (\lambda - 2)\ (\lambda + 5)$
Valeurs propres : $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = 2$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• Matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda - 10 = (\lambda - 5)\ (\lambda + 2)$

Valeurs propres : $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 5$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

• Matrice $B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 - 8\,\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$
Valeurs propres : $\lambda_1 = 4$ valeur double
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On ne trouve qu'une seule direction propre : cette matrice n'est donc pas diagonalisable.

• Matrice $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$
Valeurs propres complexes : $\lambda_1 = -i$ et $\lambda_2 = i$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

• Matrice $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

Polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 4$
Valeurs propres : $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$
Vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Corrigé ex. 56: Valeurs propres en fonction d'un paramètre

$$A = \begin{pmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{pmatrix}$$

56-1) Pour que A ait une valeur propre nulle, il faut et il suffit que son déterminant (qui le produit des valeurs propres) soit nul. On calcule :

$$\det(A) = m^2 - (m+2) = (m-2)(m+1)$$

Le déterminant s'annule pour $m = 2$ ou $m = -1$.
La somme des valeurs propres est égale à la trace =

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = 2m$$

Si $\lambda_1 = 0$, on en déduit $\lambda_2 = \mathrm{Tr}(A)$. Dans le cas $m = 2$, on obtient $\lambda_2 = 4$ et, dans le cas $m = -1$, on obtient $\lambda_2 = -2$.

56-2) On cherche les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

• Cas où $m = 2$

Le système d'équations $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, un vecteur propre possible est $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Cas où $m = -1$

Le système d'équations $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, un vecteur propre possible est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé ex. 57: Matrice transposée

57-1) Soit M une matrice carrée réelle.
On a

$$P_{{}^tM}(\lambda) = \det({}^tM - \lambda I) = \det\left({}^t(M - \lambda I)\right) = \det\left(M - \lambda I\right) = P_M(\lambda)$$

car le déterminant d'une matrice est le même que celui de sa transposée. Les polynômes caractéristiques de M et de ${}^tM$ sont identiques et, par conséquent, ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres.

57-2)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda - 10$ qui a pour racines $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 5$.

• Vecteurs propres de M

Vecteur propre pour $\lambda_1 = -2$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vecteur propre pour $\lambda_1 = 5$: $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Vecteurs propres de ${}^tM$

$$ {}^tM = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} $$

Vecteur propre pour $\lambda_1 = -2$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vecteur propre pour $\lambda_1 = 5$: $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conclusion : une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres mais n'ont pas les mêmes vecteurs propres comme le montre l'exemple précédent.

Corrigé ex. 58: Puissances de matrices

On reprend les quatre premières matrices (A_1, A_2, A_3 et A_4) de l'exercice pour calculer leur puissance n-ième.

Si P est la matrice de passage et D la matrice diagonale, on calcule A^n par la formule :

$$ \boxed{A^n = P\,D^n\,P^{-1}} $$

• Matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On calcule

$$ \begin{aligned} A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2 \times 4^n}{3} + \frac{1}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2 \times 4^n}{3} - \frac{2}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}} \end{aligned} $$

• Matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule

$$\begin{aligned} A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^n}{2} \\ \dfrac{3\,(-1)^n}{2} - \dfrac{3}{2} & \dfrac{3\,(-1)^n}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

• Matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{7} & \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On calcule

$$\begin{aligned} A^n = P\,D^n\,P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{7} & \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{2}{7} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+3}}{7} - \dfrac{(-5)^n}{7} & \dfrac{4\,(-5)^n}{7} - \dfrac{2^{n+2}}{7} \\ \dfrac{2^{n+1}}{7} - \dfrac{2\,(-5)^n}{7} & \dfrac{8\,(-5)^n}{7} - \dfrac{2^n}{7} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

• Matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{7} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

On calcule

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{6 \times 5^n}{7} + \frac{(-2)^n}{7} & \frac{(-2)^{n+1}}{7} + \frac{2 \times 5^n}{7} \\ \frac{3 \times 5^n}{7} - \frac{3\,(-2)^n}{7} & \frac{5^n}{7} - \frac{3\,(-2)^{n+1}}{7} \end{pmatrix}}$$

Corrigé ex. 59: Systèmes de suites récurrentes

Les matrices correspondant aux systèmes suivants ont déjà été diagonalisées à l'exercice . Pour les deux premières, les puissances n-ièmes ont été calculées à l'exercice .

Le principe de résolution est d'écrire le système sous forme matricielle

$$X_{t+1} = M\,X_t$$

où $X = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$.

On en déduit par récurrence (comme pour une suite géométrique) que :

$$X_t = M^t\,X_0$$

Il suffit donc, pour connaître X_t de calculer la puissance t-ième de M et de la multiplier par le vecteur des valeurs initiales X_0.

• Système S_1

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t + y_t \\ y_{t+1} = 2x_t + 2y_t \end{cases}$$

On a trouvé à l'exercice la valeur de M^t (on remplace l'indice n par l'indice t) :

$$M^t = \begin{pmatrix} \frac{2 \times 4^t}{3} + \frac{1}{3} & \frac{4^t}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{2 \times 4^t}{3} - \frac{2}{3} & \frac{4^t}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On trouve donc :

$$\boxed{\begin{cases} x_t = \frac{1}{3}\Big((2 \times 4^t + 1)\,x_0 + (4^t - 1)\,y_0\Big) \\ y_t = \frac{1}{3}\Big((2 \times 4^t - 2)\,x_0 + (4^t + 2)\,y_0\Big) \end{cases}}$$

• Système S_2

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + y_t \\ y_{t+1} = -3x_t - 2y_t \end{cases}$$

On a trouvé à l'exercice la valeur de M^t :

$$M^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{(-1)^t}{2} & \frac{1}{2} - \frac{(-1)^t}{2} \\ \frac{3\,(-1)^t}{2} - \frac{3}{2} & \frac{3\,(-1)^t}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On trouve donc :

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{2}\Big((3-(-1)^t)\,x_0 + (1-(-1)^t)\,y_0\Big) \\ y_t = \frac{1}{2}\Big((3(-1)^t-3)\,x_0 + (3(-1)^t-1)\,y_0\Big) \end{cases}$$

Ce résultat se simplifie de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{lcl} x_t &=& x_0+y_0 \\ y_t &=& -3x_0-2y_0 \end{array}\right. & \text{si } m \text{ impair} \\ \left\{\begin{array}{lcl} x_t &=& x_0 \\ y_t &=& y_0 \end{array}\right. & \text{si } m \text{ pair} \end{array}}$$

• Système S_3

$$\begin{cases} x_{t+1} &=& x_t - y_t \\ y_{t+1} &=& 2x_t - y_t \end{cases}$$

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice B_2 de l'exercice .

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont i et $-i$. On a donc intérêt à distinguer les cas où t est pair ou impair.

• Si $t = 2p$ pair

$$D^t = \begin{pmatrix} (-i)^{2p} & 0 \\ 0 & i^{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix} = (-1)^p\, I$$

On en déduit $M^t = P\,D^t\,P^{-1} = (-1)^p\,P\,I\,P^{-1} = (-1)^p\,I$.

D'où la solution :

$$\boxed{\begin{cases} x_t &=& (-1)^p\,x_0 \\ y_t &=& (-1)^p\,y_0 \end{cases}}$$

• Si $t = 2p+1$ impair

$$D^t = \begin{pmatrix} (-i)^{2p+1} & 0 \\ 0 & i^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(-1)^p & 0 \\ 0 & i(-1)^p \end{pmatrix} = i(-1)^p \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $M^t = P\,D^t\,P^{-1} = \cdots = (-1)^p \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

D'où la solution :

$$\boxed{\begin{cases} x_t &=& (-1)^p\,(x_0-y_0) \\ y_t &=& (-1)^p\,(2x_0-y_0) \end{cases}}$$

• Système S_4

$$\begin{cases} x_{t+1} &= & x_t + \sqrt{3}y_t \\ y_{t+1} &= & -\sqrt{3}x_t + y_t \end{cases}$$

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice B_3 de l'exercice .

On peut trouver la matrice M^t sans calculs en remarquant que la matrice M est le double de la matrice de rotation d'angle $\pi/3$ centrée sur l'origine. La matrice M^t est alors 2^t fois la matrice de rotation d'angle $t\pi/3$. On a donc :

$$M^t = 2^t \begin{pmatrix} \cos(t\pi/3) & \sin(t\pi/3) \\ -\sin(t\pi/3) & \cos(t\pi/3) \end{pmatrix}$$

D'où la solution :

$$\boxed{\begin{cases} x_t = 2^t \Big(\cos(t\pi/3)\, x_0 + \sin(t\pi/3)\, y_0 \Big) \\ \\ y_t = 2^t \Big(\sin(t\pi/3)\, x_0 + \cos(t\pi/3)\, y_0 \Big) \end{cases}}$$