UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI — Année universitaire 2018 – 2019
Licence d'économie — Cours de M. Desgraupes

MATHÉMATIQUES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Corrigé du TD "*Équations différentielles*"

Équations différentielles linéaires

Corrigé ex. 30: Équations d'ordre 1 à coefficients constants

• Équation $y' - 2y = 7$

Solution particulière :

$$v(t) = -\frac{7}{2}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, e^{2t}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\, e^{2t} - \frac{7}{2}$$

Solution de l'équation générale avec $y(0) = 5$:

$$\boxed{y(t) = \frac{17}{2}\, e^{2t} - \frac{7}{2}}$$

• Équation $2y' + 3y = 3t$

Solution particulière :

$$v(t) = t - \frac{2}{3}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, e^{-\frac{3}{2}t}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\, e^{-\frac{3}{2}t} + t - \frac{2}{3}$$

Solution de l'équation générale avec $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{3}{2}t} + t - \frac{2}{3}}$$

• Équation $y' - 3y = 2e^{-3t} + 1$

Solution particulière :

$$v(t) = -\frac{1}{3}(e^{-3t} + 1)$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, e^{3t}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\, e^{3t} - \frac{1}{3}(e^{-3t} + 1)$$

Solution de l'équation générale avec $y(0) = 0$:

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{3}\, e^{3t} - \frac{1}{3}(e^{-3t} + 1)}$$

• Équation $my' - y = e^{2t}$

On commence par supposer que $m \neq \frac{1}{2}$.
Solution particulière :

$$v(t) = \frac{e^{2t}}{2m - 1}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, e^{t/m}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\, e^{t/m} + \frac{e^{2t}}{2m - 1}$$

Solution de l'équation générale avec $y(0) = 0$:

$$\boxed{y(t) = \frac{e^{2t} - e^{t/m}}{2m - 1}}$$

Dans le cas où $m = \frac{1}{2}$, on trouve la solution particulière $v(t) = 2t\, e^{2t}$. On a alors :

$$y(t) = v(t) + w(t) = (2t + C)\, e^{2t}$$

Avec la condition initiale $y(0) = 0$, la solution est finalement $y(t) = 2t\, e^{2t}$.

Corrigé ex. 31: Équations d'ordre 1 à coefficients variables

Résoudre les équations différentielles à coefficients variables suivantes :

• Équation $y' - 2ty = 4t$

Solution particulière :

$$v(t) = -2$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, e^{t^2}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\, e^{t^2} - 2$$

• Équation $ty' - my = \beta t^\alpha$

Solution particulière :

$$v(t) = \frac{\beta t^\alpha}{\alpha - m}$$

lorsque $m \neq \alpha$. Dans le cas particulier où $m = \alpha$, on obtient $y = \beta\, t^\alpha\, \log t$.

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = C\, t^m$$

Solution de l'équation générale (lorsque $m \neq \alpha$) :

$$y(t) = v(t) + w(t) = \frac{\beta t^\alpha}{\alpha - m} + C\, t^m$$

Dans le cas où $m = \alpha$, on a $y(t) = t^\alpha(\beta \log t + C)$.

• Équation $(t^2 - 1)y' - t^{-1}y = m$

Solution particulière :

$$v(t) = -\frac{m}{t}$$

L'équation homogène se décompose sous la forme

$$\frac{w'}{w} = \frac{1}{t(t^2-1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$$

On en déduit que

$$(\log|w|)' = \left(-\log|t| + \frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{2}\log|t+1|\right)' = \left(\log\frac{\sqrt{|t^2-1|}}{|t|}\right)'$$

Finalement la solution de l'équation homogène est (en supposant que $t \neq 0$) :

$$w(t) = C\,\frac{\sqrt{|t^2-1|}}{t}$$

Solution de l'équation générale :

$$y(t) = v(t) + w(t) = C\,\frac{\sqrt{|t^2-1|}}{t} - \frac{m}{t}$$

Corrigé ex. 32: Équations d'ordre 2 à coefficients constants

Dans toutes les équations qui suivent, on utilise les mêmes conditions initiales $y(0) = y'(0) = -1$.

• Équation $y'' + 3\,y' + 2\,y = t\,e^{-t}$

Solution particulière :

$$v(t) = \frac{1}{2}\,(t^2 - 2\,t)\,e^{-t}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = \lambda\,e^{-t} + \mu\,e^{-2\,t}$$

Solution de l'équation complète avec les conditions initiales :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\,(t^2 - 2\,t - 4)\,e^{-t} + e^{-2\,t}}$$

• Équation $y'' - 4\,y = 10$

Solution particulière :

$$v(t) = -\frac{5}{2}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = \lambda\,e^{-2t} + \mu\,e^{2\,t}$$

Solution de l'équation complète avec les conditions initiales :

$$\boxed{y(t) = e^{-2t} + \frac{1}{2}\,e^{2\,t} - \frac{5}{2}}$$

• Équation $y'' - 6\,y' + 9\,y = -2\,e^{3t}$

Solution particulière :

$$v(t) = -t^2\,e^{3\,t}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = (\lambda t + \mu)\,e^{3\,t}$$

Solution de l'équation complète avec les conditions initiales :

$$\boxed{y(t) = (-t^2 + 2\,t - 1)\,e^{3\,t}}$$

• Équation $y'' + 2\,y' + 5\,y = e^{-t} + \sin(2t)$

Solution particulière :

$$v(t) = \frac{\sin(2\,t) - 4\,\cos(2\,t)}{17} + \frac{e^{-t}}{4}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = e^{-t}\left(\lambda\,\sin(2\,t) + \mu\,\cos(2\,t)\right)$$

Solution de l'équation complète avec les conditions initiales :

$$\boxed{y(t) = -e^{-t}\,\frac{64\,\sin(2\,t) - 69\,\cos(2\,t)}{68} + \frac{\sin(2\,t) - 4\,\cos(2\,t)}{17} + \frac{e^{-t}}{4}}$$

• Équation $8\,y'' - 4\,y' + 3\,y = -3\,e^{-t}$
Solution particulière :

$$v(t) = -\frac{1}{5}\,e^{-t}$$

Solution de l'équation homogène :

$$w(t) = e^{\frac{t}{4}}\,\left(\lambda\,\sin\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{4}\right) + \mu\,\cos\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{4}\right)\right)$$

Solution de l'équation complète avec les conditions initiales :

$$\boxed{y(t) = -\frac{4}{5}e^{\frac{t}{4}}\,\left(\cos\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{4}\right) + \sqrt{5}\,\sin\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{4}\right)\right) - \frac{1}{5}\,e^{-t}}$$

Corrigé ex. 33: Équation dépendant d'un paramètre

$$(E) \qquad y'' + 4\,y' + m\,y = e^{-2\,t}$$

33-1) L'équation homogène associée (H) est :

$$(H) \qquad w'' + 4\,w' + m\,w = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta' = 4 - m$$

1-a) La forme de $w(t)$ dépend du signe du discriminant.

Si $m < 4$ alors $\Delta' > 0$ et on a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. La solution de (H) s'écrit :

$$w(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

Si $m = 4$ alors $\Delta' = 0$ et on a une racine réelle double r. La solution de (H) s'écrit :

$$w(t) = (k_1 t + k_2)e^{rt}$$

Si $m > 4$ alors $\Delta' < 0$ et on a deux racines complexes conjuguées qu'on écrit sous forme algébrique $z = \alpha + i\beta$. La solution de (H) s'écrit :

$$w(t) = e^{\alpha\,t}\left(k_1\cos(\beta t) + k_2\sin(\beta t)\right)$$

1-b) La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions $w(t)$ tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$ est donnée par les conditions de stabilité.

Résultat de cours : si l'équation est notée $w'' + a\,w' + b\,w = 0$, les conditions de stabilité s'expriment par les relations suivantes

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right.}$$

Dans le cas présent, cela se ramène à $\boxed{m > 0}$.

33-2)

2-a) La valeur d'équilibre est une solution particulière de (E). On cherche a priori $v(t) = C\,e^{-2\,t}$.

On en déduit que $v'(t) = -2C\,e^{-2\,t}$ et $v''(t) = 4C\,e^{-2\,t}$. D'où, en remplaçant dans l'équation (E) :

$$4C\,e^{-2\,t} + 4(-2C\,e^{-2\,t}) + mC\,e^{-2\,t} = e^{-2\,t}$$

On en tire $\boxed{C = \dfrac{1}{m-4}}$ lorsque $m \neq 4$.

Dans le cas où $m = 4$, il faut chercher $v(t)$ sous la forme $v(t) = C\,t^2\,e^{-2\,t}$. Tout calcul fait, on trouve $C = 1/2$ et donc $v(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,e^{-2\,t}$.

2-b) La nature de l'équilibre a été discutée à la question précédente : l'équilibre est stable si et seulement si $m > 0$..

Corrigé ex. 34: Solution d'équilibre

$$(E) \qquad m\,y'' + 3\,(m-1)\,y' + 3\,y = 6$$

34-1) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $v(t) = K$. On a alors $v'(t) = v''(t) = 0$ et, en reportant dans l'équation (E), on obtient $K = 2$ quelle que soit la valeur de m.

34-2) La valeur d'équilibre de (E) est la solution particulière trouvée à la question précédente.

34-3) Condition nécessaire et suffisante pour que cet équilibre soit stable.

Pour utiliser les conditions de stabilité, on doit mettre le membre de gauche de l'équation sous la forme $y'' + a\,y' + b\,y$:

$$y'' + 3\,\frac{m-1}{m}\,y' + \frac{3}{m}\,y$$

et alors les conditions s'expriment par les relations

$$\left\{ \begin{array}{c} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right.$$

Ici on obtient les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m-1}{m} > 0 \\ \dfrac{3}{m} > 0 \end{array} \right.$$

ce qui impose finalement $\boxed{m > 1}$.

34-4)

4-a) Pour que toutes les solutions de (E) présentent des oscillations, il faut et il suffit que le discriminant de l'équation caractéristique associée soit négatif. On a :

$$P(r) = m\,r^2 + 3\,(m-1)\,r + 3 = 0$$

On calcule

$$\Delta = 9\,(m-1)^2 - 12\,m = 3(3m^2 - 10m + 3) = 3(m-3)(3m-1)$$

Le discriminant est négatif lorsque $\boxed{1/3 < m < 3}$.

4-b) Pour que les oscillations soient amorties, il faut que l'équilibre soit stable. On a vu, en discutant les conditions de stabilité, que la condition est $m > 1$. Compte-tenu du résultat précédent, on obtient $\boxed{1 < m < 3}$.

Corrigé ex. 35: Solution particulière

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = t\,e^{m\,t}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $v(t) = (at+b)\,e^{m\,t}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} v'(t) &= m\,(a\,t+b)\,e^{m\,t} + a\,e^{m\,t} \\ v''(t) &= m^2\,(a\,t+b)\,e^{m\,t} + 2\,a\,m\,e^{m\,t} \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation, on obtient :

$$\left[a\,(m-2)^2\,t + b\,(m-2)^2 + 2a(m-2)\right]\,e^{m\,t} = t\,e^{m\,t}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a\,(m-2)^2 = 1 \\ b\,(m-2)^2 + 2a(m-2) = 0 \end{cases}$$

D'où finalement, lorsque $m \neq 2$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{(m-2)^2} \\[2ex] b = \dfrac{-2}{(m-2)^3} \end{cases}$$

Dans le cas où $m = 2$, on doit chercher la solution particulière sous la forme $v(t) = Ct^3\,e^{2t}$. Tout calcul fait, on trouve $v(t) = 1/6\,t^3\,e^{2t}$.

Solution générale de l'équation homogène :

$$w(t) = (k_1\,t + k_2)\,e^{2\,t}$$

Finalement on reconstitue $y(t) = w(t) + v(t)$.

Nature de l'équilibre obtenu : l'équilibre est instable à cause du terme $e^{2\,t}$ qui fait diverger la fonction $w(t)$ représentant les écarts à l'équilibre.

Corrigé ex. 36: Équation vérifiée par une fonction

36-1) Pour chacune des fonctions y ci-dessous, on cherche une équation différentielle *homogène du second ordre* dont y soit solution générale :

• Fonction $y = \lambda e^t + \mu e^{5t}$
Un polynôme caractéristique dont les racines sont 1 et 5 est

$$P(r) = (r-1)(r-5) = r^2 - 6r + 5$$

La fonction y vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{y'' - 6\,y' + 5\,y = 0}$$

• Fonction $y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t}$
Un polynôme caractéristique ayant 5 comme racine double est

$$P(r) = (r-5)^2 = r^2 - 10r + 25$$

La fonction y vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{y'' - 10\,y' + 25\,y = 0}$$

• Fonction $y = e^{2t}\,(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t)$
Un polynôme caractéristique dont les racines sont $2 \pm 3i$ est

$$P(r) = \big(r - (2+3i)\big)\big(r - (2-3i)\big) = r^2 - 4r + 13$$

La fonction y vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{y'' - 4\,y' + 13\,y = 0}$$

• Fonction $y = \lambda + \mu e^{5t}$
Un polynôme caractéristique dont les racines sont 0 et 5 est

$$P(r) = r(r-5) = r^2 - 5r$$

La fonction y vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{y'' - 5\,y' = 0}$$

36-2) Construire des équations différentielles du second ordre avec second membre ayant pour solution générale les fonctions y données.

Dans chaque cas, on commence par trouver une équation homogène, puis on calcule le second membre correspondant à la solution particulière donnée.

• Fonction $y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t} + 3$
Un polynôme caractéristique ayant 5 comme racine double est

$$P(r) = (r-5)^2 = r^2 - 10r + 25$$

La fonction w vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{w'' - 10\,w' + 25w = 0}$$

On calcule les dérivées de y en fonction de w :

$$y = w + 3 \quad \Longrightarrow y' = w', \quad y'' = w''$$

et on remplace dans l'équation :

$$y'' - 10\,y' + 25y = w'' - 10\,w' + 25(w + 3) = w'' - 10\,w' + 25w + 75 = 75$$

L'équation recherchée est donc :

$$\boxed{y'' - 10\,y' + 25y = 75}$$

• Fonction $y = \lambda e^{5t} + \mu t e^{5t} + 2te^t$
La partie correspondant à l'équation homogène est la même que dans l'exemple précédent. On utilise donc le même polynôme caractéristique. On calcule les dérivées de y en fonction de w :

$$\begin{aligned} y = w + 2te^t \quad &\Longrightarrow \quad y' = w' + 2(e^t + t\,e^t) \\ &\Longrightarrow \quad y'' = w'' + 2(2\,e^t + t\,e^t) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} y'' - 10\,y' + 25y &= w'' + 2(2\,e^t + t\,e^t) - 10\,(w' + 2(e^t + t\,e^t)) + 25(w + 2te^t) \\ &= w'' - 10\,w' + 25w - 16e^t + 32t\,e^t \\ &= 16e^t(2t - 1) \end{aligned}$$

L'équation recherchée est donc :

$$\boxed{y'' - 10\,y' + 25y = 16e^t(2t - 1)}$$

• Fonction $y = \lambda + \mu e^{5t} + t$
Un polynôme caractéristique dont les racines sont 0 et 5 est

$$P(r) = r(r - 5) = r^2 - 5r$$

La fonction w vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{w'' - 5\,w' = 0}$$

On calcule les dérivées de y en fonction de w :

$$y = w + t \quad \Longrightarrow y' = w' + 1, \quad y'' = w''$$

et on remplace dans l'équation :

$$y'' - 5\,y' = w'' - 5(w' + 1) = w'' - 5\,w' - 5 = -5$$

L'équation recherchée est donc :

$$\boxed{y'' - 5\,y' = -5}$$

• Fonction $y = e^{2t}\,(\lambda \cos 3t + \mu \sin 3t) + 4$
Un polynôme caractéristique dont les racines sont $2 \pm 3i$ est

$$P(r) = \big(r - (2+3i)\big)\big(r - (2-3i)\big) = r^2 - 4r + 13$$

La fonction y vérifie donc l'équation différentielle homogène associée

$$\boxed{w'' - 4\,w' + 13\,w = 0}$$

On calcule les dérivées de y en fonction de w :

$$y = w + 4 \quad \Longrightarrow y' = w', \quad y'' = w''$$

et on remplace dans l'équation :

$$y'' - 4\,y' + 13\,y = w'' - 4\,w' + 13\,(w+4) = 52$$

L'équation recherchée est donc :

$$\boxed{y'' - 4\,y' + 13\,y = 52}$$

Corrigé ex. 37: Recherche d'un solution maximale I

$$t\,y'(t) - 3\,y(t) + t^2 = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

37-1) Trouver toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}^{\star+}$.
On cherche une solution particulière de la forme $v(t) = at^2+bt+c$. En remplaçant dans $(\mathcal{E})$, on trouve facilement $a = 1$, $b = c = 0$, d'où $v(t) = t^2$.
L'équation homogène est $t\,w' - 3w = 0$. On en tire

$$\frac{w'}{w} = \frac{3}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|w|)' = (3\log(t))' = \big(\log(t^3)\big)'$$

pour $t > 0$. D'où $\log|w| = \log(t^3) + C$ et finalement

$$w(t) = \pm e^C\,t^3 = K\,t^3$$

Les solutions sont finalement de la forme :

$$\boxed{y(t) = K\,t^3 + t^2}$$

37-2) De manière analogue sur $\mathbb{R}^{\star-}$, c'est-à-dire pour $t < 0$, on trouve :

$$\boxed{y(t) = K\,|t|^3 + t^2}$$

37-3) Quelles sont les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$?
Les solutions trouvées aux questions précédentes vérifient $y(0) = 0$. Autrement dit elles se raccordent en 0. Sur $\mathbb{R}$ entier, on peut donc recoller les morceaux et écrire les solutions de la manière suivante :

$$f(t) = \begin{cases} K_1\,t^3 + t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ K_2\,|t|^3 + t^2 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Noter que les constantes K_1 et K_2 ne sont pas nécesairement égales car l'équation ne donne aucun renseignement sur les dérivées en 0.

Corrigé ex. 38: Recherche d'un solution maximale II

$$\sqrt{|t|}\, y'(t) - y(t) = 1 \qquad (\mathcal{E})$$

38-1) Sur $\mathbb{R}^{\star+}$, l'équation s'écrit $\sqrt{t}\, y'(t) - y(t) = 1$.
Une solution particulière évidente est $v(t) = -1$.
L'équation homogène est $\sqrt{t}\, w' - w = 0$. On en tire

$$\frac{w'}{w} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|w|)' = \left(2\sqrt{t}\right)'$$

pour $t > 0$. D'où $\log|w| = 2\sqrt{t} + C$ et finalement

$$w(t) = \pm e^{C}\, e^{2\sqrt{t}} = K\, e^{2\sqrt{t}}$$

Les solutions sont finalement de la forme :

$$\boxed{y(t) = Ke^{2\sqrt{t}} - 1}$$

38-2) Sur $\mathbb{R}^{\star-}$, on remplace t par $-t$. On trouve finalement

$$\boxed{y(t) = Ke^{-2\sqrt{|t|}} - 1}$$

38-3) Pour trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$, il faut pouvoir raccorder en 0 les solutions trouvées aux questions précédentes sur $\mathbb{R}^{\star+}$ et sur $\mathbb{R}^{\star-}$.
En $t = 0$, les solutions trouvées valent $K - 1$. Pour qu'elles se raccordent, il faut prendre la même valeur de K pour les deux branches.

Corrigé ex. 39: Recherche d'un solution maximale III

$$(4 - t^2)\, y'(t) + ty(t) = 2$$

39-1) Cherchons une solution particulière de la forme $v(t) = at + b$. En remplaçant dans l'équation, on trouve immédiatement $a = 1/2$ et $b = 0$. D'où $v(t) = \dfrac{t}{2}$.
L'équation homogène est $(4 - t^2)\, w' + tw = 0$. On en tire

$$\frac{w'}{w} = \frac{t}{t^2 - 4} \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|w|)' = \left(\frac{1}{2}\log|t^2 - 4|\right)'$$

On en tire

$$\log|w| = \frac{1}{2}\log|t^2 - 4| + C = \log\sqrt{|t^2 - 4|} + C$$

et finalement

$$w(t) = \pm e^{C}\ \log\sqrt{|t^2 - 4|} = K\ \log\sqrt{|t^2 - 4|}$$

En ajoutant la solution particulière, on obtient :

$$\boxed{y(t) = \frac{t}{2} + K\ \log\sqrt{|t^2 - 4|}}$$

Si $K \neq 0$, cette solution n'est pas définie en $t = \pm 2$ (car le logarithme n'est pas défini en 0) et on doit distinguer les trois intervalles délimités par ces deux valeurs. Sur chaque intervalle, la solution s'écrit comme précédemment mais pas nécessairement avec la même valeur de K.

39-2) À cause du problème de définition en $t = \pm 2$, on est obligés de prendre $K = 0$ pour obtenir une solution de $(\mathcal{E})$ définie sur $\mathbb{R}$ entier. La solution est alors unique $y = \dfrac{t}{2}$.

Méthode de variation de la constante

Corrigé ex. 40: Variation de la constante à l'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de variation de la constante.

• Équation $t^2 y' - y = 4$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$t^2 w' - w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w'}{w} = \frac{1}{t^2} \text{ pour } t \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|w|)' = \left(-\frac{1}{t}\right)'$$

D'où $\log|w| = -\dfrac{1}{t} + C$ et finalement

$$w(t) = \pm e^C \, e^{-\frac{1}{t}} = K \, e^{-\frac{1}{t}}$$

Noter que cette solution est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et que la constante K peut différer selon que x est positif ou négatif.

On va maintenant faire *varier la constante*, c'est-à-dire chercher une solution de l'équation complète (et non plus de l'équation homogène) qui soit de la même forme avec un K qui dépend de t. Autrement dit, on cherche une solution y de la forme :

$$y(t) = K(t) \, e^{-\frac{1}{t}}$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$y'(t) = K'(t) \, e^{-\frac{1}{t}} + K(t) \, e^{-\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2}$$

On reporte dans l'équation complète :

$$t^2 \left(K'(t) \, e^{-\frac{1}{t}} + K(t) \, e^{-\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2} \right) - K(t) \, e^{-\frac{1}{t}} = 4$$

Les termes en K se simplifient et il reste :

$$t^2 K'(t) \, e^{-\frac{1}{t}} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad K'(t) = 4 e^{\frac{1}{t}} \frac{1}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad K(t) = -4 e^{\frac{1}{t}} + C$$

En définitive, la solution est :

$$\boxed{y(t) = C e^{-\frac{1}{t}} - 4}$$

• Équation $\cos(t) y' - \sin(t) y = t$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$\cos(t)w' - \sin(t)w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w'}{w} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|w|)' = (-\log|\cos(t)|)'$$

D'où $\log|w| = -\log|\cos(t)| + C = \log\dfrac{1}{|\cos(t)|} + C$ et finalement

$$w(t) = \frac{K}{\cos(t)}$$

Noter que cette solution est définie seulement pour les valeurs de t qui n'annulent pas le cosinus, c'est-à-dire $t \neq \pi/2 + k\pi$.

On va maintenant faire *varier la constante*, c'est-à-dire chercher une solution y de l'équation complète de la forme :

$$y(t) = \frac{K(t)}{\cos(t)}$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$y'(t) = \frac{K'(t)\cos(t) + K(t)\sin(t)}{\cos^2(t)}$$

On reporte dans l'équation complète :

$$\cos(t)\left(\frac{K'(t)\cos(t) + K(t)\sin(t)}{\cos^2(t)}\right) - \sin(t)\frac{K(t)}{\cos(t)} = t$$

Les termes en K se simplifient et il reste :

$$K'(t) = t \quad \Longleftrightarrow \quad K(t) = \frac{t^2}{2} + C$$

En définitive, la solution est :

$$\boxed{y(t) = \frac{\frac{t^2}{2} + C}{\cos(t)}}$$

• Équation $(t^2-1)y' - t^{-1}y = m$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$(t^2-1)w' - t^{-1}w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{w'}{w} = \frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{1}{2\ (t+1)} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2\ (t-1)}$$

D'où, par intégration,

$$\log|w| = \frac{1}{2}\log|t+1| - \log|t| + \frac{1}{2}\log|t-1| + C = \log\left(\frac{\sqrt{|t^2-1|}}{|t|}\right) + C$$

En prenant l'exponentielle des deux membres, on obtient

$$w(t) = K\frac{\sqrt{|t^2-1|}}{t}$$

Noter que cette solution est définie seulement pour $t \neq 0$. Pour simplifier les calculs qui suivent, on va supposer que $t^2 - 1 \geq 0$ (il faudra traiter ensuite le cas contraire).

On va maintenant faire *varier la constante*, c'est-à-dire chercher une solution y de l'équation complète de la forme :

$$y(t) = K(t)\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$$

En dérivant cette relation et en reportant dans l'équation complète,les termes en K se simplifient et on obtient :

$$K'(t)\frac{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}}{t} = m \quad \iff \quad K'(t) = \frac{mt}{(t^2-1)^{3/2}} = \left(\frac{-m}{\sqrt{t^2-1}}\right)'$$

On en tire que $K(t) = \dfrac{-m}{\sqrt{t^2-1}} + C$ et finalement la solution est :

$$\boxed{y(t) = \frac{-m + C\sqrt{t^2-1}}{t}}$$

Corrigé ex. 41: Variation de la constante à l'ordre 2

Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2

$$y'' + 5y' + 6y = (2t+3)\,e^{-t}$$

par la méthode de variation de la constante.

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$w'' + 5w' + 6w = 0$$

Elle est linéaire à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 6 = 0$ qui a pour racines -2 et -3. On trouve donc

$$w(t) = C_1\,e^{-2t} + C_2\,e^{-3t} = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$$

en notant $y_1(t) = e^{-2t}$ et $y_2(t) = e^{-3t}$.

Le principe de la méthode de variation de la constante à l'ordre 2 consiste à faire varier les deux constantes en imposant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} y = & C_1(t)\,y_1(t) + C_2(t)\,y_2(t) \\ y' = & C_1(t)\,y_1'(t) + C_2(t)\,y_2'(t) \end{cases} \tag{$*$}$$

Cela donne

$$\begin{cases} y = & C_1(t)\,e^{-2t} + C_{2(t)}\,e^{-3t} \\ y' = & -2C_1(t)\,e^{-2t} - 3C_2(t)\,e^{-3t} \end{cases}$$

En dérivant la première des équations ($*$) et en comparant avec la deuxième, on obtient la relation :

$$C_1'(t)\,e^{-2t} + C_2'(t)\,e^{-3t} = 0 \tag{1}$$

Maintenant on dérive la deuxième des équations ($*$) pour avoir une expression de y'' :

$$y'' = -2C_1'(t)\,e^{-2t} + 4C_1(t)\,e^{-2t} - 3C_2'(t)\,e^{-3t} + 9C_2(t)\,e^{-3t}$$

En reportant dans l'équation complète les expressions obtenues pour y' et y'', tous les termes en C_1 et C_2 se simplifient et il reste seulement :

$$-\,2C_1'(t)\,e^{-2t} - 3C_2'(t)\,e^{-3t} = (2t+3)\,e^{-t} \tag{2}$$

Par combinaison des équations (1) et (2), on peut éliminer le terme en $C_1'(t)$ et il reste seulement :

$$C_2'(t) = -(2t+3)\, e^{2t}$$

Par intégration par partie, on en tire :

$$C_2(t) = -(t+1)\, e^{2t} + k_2$$

De la même manière, en éliminant le terme en $C_2'(t)$, on trouve :

$$C_1'(t) = (2t+3)\, e^{t} \quad \Longrightarrow \quad C_1(t) = (2t+1)\, e^{t} + k_1$$

On reporte ces valeurs dans l'expression de y :

$$y(t) = \big((2t+1)\, e^{t} + k_1\big)\, e^{-2t} - \big((t+1)\, e^{2t} + k_2\big)\, e^{-3t}$$

En définitive, la solution est

$$\boxed{y(t) = t\, e^{-t} + k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t}}$$

Équations différentielles non linéaires

Le premier exemple est corrigé en détail. Pour les autres, on indique seulement la solution.

Corrigé ex. 42: Équations à variables séparables

• Équation $y' - t^2 = t^2\, y$

L'équation conduit à $y' = t^2\,(y+1)$ et donc

$$\frac{y'}{y+1} = t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\log|y+1|)' = \left(\frac{t^3}{3}\right)' \quad \Longleftrightarrow \quad \log|y+1| = \frac{t^3}{3} + C$$

D'où finalement

$$\boxed{y = K\, e^{\frac{t^3}{3}} - 1}$$

• Équation $y' = -\dfrac{t}{y}$

Solutions :

$$\boxed{y = \pm\sqrt{-t^2 + C}}$$

définies pour $t^2 < C$.

• Équation $y' = y\, \log(t)$

Solutions :

$$\boxed{y = K\, e^{t\, \log t - t}}$$

définies pour $t > 0$.

• Équation $(t-1)\, y' = 2\, y$

Solutions :

$$\boxed{y = K\,(t-1)^2}$$

• Équation $(t+1)\,y' = y^2$

Solutions :

$$\boxed{y = -\frac{1}{\log|t+1| + C}}$$

• Équation $\cos(t)\,y' - \sin(t)\,y = 0$

Solutions :

$$\boxed{y = \frac{C}{\cos(t)}}$$

définies pour les valeurs de t telles que $\cos(t) \neq 0$, c'est-à-dire $t \neq \pi/2 + k\pi$.

• Équation $\cos^2(t)y' - y = 0$

Solutions :

$$\boxed{y = K\,e^{\tan(t)}}$$

• Équation $(1+t^2)\,y' = \sqrt{1-y^2}$

Solutions :

$$\boxed{y = \sin\big(\arctan(t) + C\big)}$$

Remarque : ici il faut savoir que $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la dérivée de la fonction $\arcsin(t)$ et que $\dfrac{1}{1+t^2}$ est la dérivée de la fonction $\arctan(t)$.

Corrigé ex. 43: Équations à variables homogènes

Les équations différentielles homogènes sont celles de la forme $y' = f\left(\dfrac{y}{t}\right)$.

On les résout au moyen du changement d'inconnue $z = \dfrac{y}{t}$, ce qui implique que $y = tz$ et donc $y' = z + tz'$. L'équation devient donc :

$$z + tz' = f(z) \quad \Longleftrightarrow \quad tz' = f(z) - z$$

qui est une équation à variables séparables (voir l'exercice 42).

Le premier exemple ci-desous est corrigé en détail. Pour les autres, on indique seulement la solution.

• Équation $t\,y' = t - y$

En divisant par t, on obtient

$$y' = 1 - \frac{y}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad z + tz' = 1 - z \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z'}{2z-1} = -\frac{1}{t}$$

Par intégration des deux membres, on obtient :

$$\frac{1}{2}\log|2z-1| = -\log|t| + C \quad \Longleftrightarrow \quad \log|2z-1| = \log t^{-2} + 2C$$

On en déduit que $2z - 1 = Kt^{-2}$, d'où $z = \dfrac{Kt^{-2}+1}{2}$ et finalement, puisque $y = tz$,

$$\boxed{y = \frac{t^2+K}{2t}}$$

définies pour $t \neq 0$.

• Équation $t\,y' = y - t$

Solutions :

$$\boxed{y = t\big(C - \log|t|\big)}$$

définies pour $t \neq 0$.

• Équation $t\,y\,y' = t^2 + y^2$

Solutions :

$$\boxed{y = \pm t\,\sqrt{\log(t^2)+C}}$$

• Équation $t\,y' - y = t\,(t+y)$

Cette équation n'est pas homogène à proprement dit mais, par chance, se résout au moyen du même changement d'inconnue $z = \dfrac{y}{t}$.

Solutions :

$$\boxed{y = t\,\left(C\,e^t - 1\right)}$$

Équations différentielles linéarisables

Corrigé ex. 44: Linéarisation

44-1) On considère l'équation différentielle

$$t\,y'(t) = 2\,y(t) \tag{3}$$

On l'écrit sous la forme

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t}$$

et on trouve facilement la solution $\boxed{y(t) = C\,t^2}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

44-2) On considère l'équation différentielle

$$t\,y'(t) = 2\,y(t) + 4\,t^4\,e^{2\,t} \tag{4}$$

Solution particulière :

$$v(t) = t^2\,(2t-1)\,e^{2\,t}$$

La solution de l'équation homogène a été obtenue à la question précédente. Finalement la solution de l'équation complète (4) est :

$$\boxed{y(t) = t^2\,(2t-1)\,e^{2\,t} + C\,t^2}$$

44-3) On considère l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\,t\,z'(t) = 2\,z(t) + 4\,t^4\,e^{2t}\sqrt{z(t)} \tag{5}$$

On effectue le changement d'inconnue $y = z^{\frac{1}{2}}$. On a alors $y' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}z'$. En reportant y et y' dans l'équation (4), on obtient l'équation (5).

Les solutions positives z de l'équation (5) se déduisent finalement des solutions y de (4) par la relation $\boxed{z = y^2}$.

Corrigé ex. 45: Équation de Bernoulli 1

$$(t^2+1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y} \tag{6}$$

45-1) On suppose $y > 0$ et on utilise le changement d'inconnue $z = \sqrt{y}$. On a donc $y = z^2$ et $y' = 2z\,z'$. En reportant dans l'équation (6), on obtient :

$$(t^2+1)2\,z\,z' = 4t\,z^2 + 4t\,z$$

qui se simplifie en

$$(t^2+1)\,z' = 2t\,z + 2t \tag{7}$$

Cette dernière équation est linéaire (à coefficients non constants). C'est une équation à variables séparables :

$$\frac{z'}{z+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Par conséquent

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z+1} = \int \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

On en déduit que

$$\log|z+1| = \log(t^2+1) + C \quad \Longrightarrow \quad z+1 = K(t^2+1)$$

et donc

$$z(t) = K(t^2+1) - 1$$

Finalement, on fait le changement d'inconnue en sens inverse $y = z^2$ pour trouver les solutions y positives de l'équation (6) :

$$\boxed{y(t) = \big(K(t^2+1)-1\big)^2}$$

Remarque : voici une autre méthode de résolution de l'équation (7).

On voit facilement qu'une solution particulière de cette équation est

$$v(t) = -1$$

L'équation homogène associée $(t^2+1)w' = 2tw$ s'écrit

$$\frac{w'}{w} = \frac{2t}{t^2+1}$$

On trouve donc $w = K(t^2+1)$ et, par conséquent, la solution de l'équation (7) est (comme trouvé précédemment) :

$$z(t) = w(t) + v(t) = K(t^2+1) - 1$$

45-2) Question facultative : on cherche tous les couples $(t_0,\, y_0)$ qui peuvent servir de condition initiale à l'équation différentielle. On doit donc discuter la relation $y(t_0) = y_0$ et voir dans quel cas elle conduit à une solution unique.

Elle est équivalente à :

$$y_0 = \big(K(t_0^2+1)-1\big)^2$$

Cela impose évidemment $y_0 \geq 0$.

On en tire :

$$K = \frac{\pm\sqrt{y_0}+1}{t_0^2+1}$$

Si $y_0 \neq 0$, on trouve deux valeurs de K mais, comme $z = \sqrt{y}$, z doit être positif et donc il faut $K(t_0^2+1) \geq 1$. Cela élimine le signe moins et on a seulement la valeur $K = \dfrac{\sqrt{y_0}+1}{t_0^2+1}$.

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{\sqrt{y_0}+1}{t_0^2+1}(t^2+1) - 1\right]^2}$$

Corrigé ex. 46: Équation de Bernoulli 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2\, y' + t\, y = 2(\sqrt{t}+1)\,\sqrt{y} \tag{8}$$

avec $t > 0$.

46-1) On fait le changement d'inconnue $z = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

On a $z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'$. Par substitution dans l'équation (11) et simplification, on obtient :

$$2t^2\, z' + t\, z = 2(\sqrt{t}+1) \tag{9}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

46-2) Résolvons l'équation homogène associée à l'équation (9) :

$$2t^2\, w' + t\, w = 0$$

On a :

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t}$$

On en déduit, compte-tenu du fait que $t > 0$ par hypothèse :

$$\Big(\log|w|\Big)' = \Big(-\frac{1}{2}\,\log(t)\Big)'$$

et finalement

$$\boxed{w = \frac{C}{\sqrt{t}}}$$

On fait maintenant la méthode de la variation de la constante en posant :

$$z = \frac{C(t)}{\sqrt{t}}$$

Par dérivation, on a $z' = C'\, t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} C\, t^{-\frac{3}{2}}$. En remplaçant dans l'équation (9), on obtient :

$$2t^{\frac{3}{2}}\, C' = 2(\sqrt{t}+1) = 2(t^{\frac{1}{2}}+1)$$

D'où

$$C'(t) = t^{-1} + t^{-\frac{3}{2}}$$

et par intégration :

$$C(t) = \log(t) - 2t^{-\frac{1}{2}} + K = \log(t) - \frac{2}{\sqrt{t}} + K$$

Finalement :

$$z(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\Big(\log(t) - \frac{2}{\sqrt{t}} + K\Big) \tag{10}$$

46-3) Solutions de l'équation initiale (11).
Le changement d'inconnue implique que $y = z^2$ et par conséquent :

$$\boxed{y = \frac{1}{t}\Big(\log(t) - \frac{2}{\sqrt{t}} + K\Big)^2}$$

46-4) Solution correspondant à la condition $y(1) = 1$.
En substituant la valeur $t = 1$, on obtient

$$y(1) = (-2 + K)^2 = 1$$

ce qui conduit à $K = 1$ ou $K = 3$.

On doit éliminer la valeur 1 car elle conduirait à une valeur négative pour $z(1)$ dans (10) alors qu'il doit être positif puisque $z = \sqrt{y}$. On a finalement seulement $K = 3$ et la solution est donc

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{t}\Big(\log(t) - \frac{2}{\sqrt{t}} + 3\Big)^2}$$

Corrigé ex. 47: Modèles économiques de type Bernoulli

Les équations de Bernoulli sont de la forme :

$$a\,y' + b\,y = c\,y^{\alpha} \tag{11}$$

où a, b et c sont des fonctions.

On les résout en utilisant le changement d'inconnue $z = y^{1-\alpha}$. En dérivant, on a donc $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$.

Si on divise les deux membres de l'équation (11) par y^{α}, on obtient :

$$a\,\frac{y'}{y^{\alpha}} + b\,y^{1-\alpha} = c$$

Par conséquent

$$\boxed{\frac{a}{1-\alpha}z' + bz = c}$$

qui est une équation différentielle linéaire.

• Équation $y'(t) = a\,y(t) - b\,y(t)^2$

Cette équation constitue le modèle de Malthus. On a ici $\alpha = 2$ et a, b sont des constantes.

Changement d'inconnue : $z = y^{-1} \quad \Longrightarrow \quad z' = -y^{-2}y'$

Équation en z : $z' = -az + b$

Solution en z : $z = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$

Solution en y : $y = \frac{1}{z}$

On trouve finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-at}}}$$

• Équation $y'(t) = y(t) + \frac{t}{y(t)}$

On a ici $\alpha = -1$.
Changement d'inconnue : $z = y^2 \quad \Longrightarrow \quad z' = 2yy'$

Équation en z : $\frac{1}{2}z' - z = t$

Solution en z : $z = Ce^{2t} - t - \frac{1}{2}$

Solution en y : $y(t) = \sqrt{z}$

On trouve finalement :

$$\boxed{y = \sqrt{Ce^{2t} - t - \frac{1}{2}}}$$

• Équation $y'(t) = t\Big[y(t) + \frac{1}{y(t)}\Big]$

On a ici $\alpha = -1$.
Changement d'inconnue : $z = y^2 \quad \Longrightarrow \quad z' = 2yy'$

Équation en z : $\frac{1}{2}z' - t\,z = t$

Solution en z : $z = Ce^{t^2} - 1$

Solution en y : $y = \sqrt{z}$

On trouve finalement :

$$\boxed{y = \sqrt{Ce^{t^2} - 1}}$$

• Équation $y'(t) = 2\,t\,y(t) - 6\,t^3\,y(t)^2$

On a ici $\alpha = 2$.
Changement d'inconnue : $z = y^{-1} \quad \Longrightarrow \quad z' = -y^{-2}y'$

Équation en z : $z' + 2t\,z = 6t^3$

Solution en z : $z = Ce^{-t^2} + 3(t^2 - 1)$

Solution en y : $y = \dfrac{1}{z}$

On trouve finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{Ce^{-t^2} + 3(t^2 - 1)}}$$

• Équation $y'(t) = s\,y(t)^r - n\,y(t)$

Cette équation constitue le modèle de Solow/Cobb-Douglas. On a ici $\alpha = r$ et on suppose que $r \neq 1$.

Changement d'inconnue : $z = y^{1-r} \quad \Longrightarrow \quad z' = (1-r)y^{-r}y'$

Équation en z : $\dfrac{1}{1-r}z' + n\,z = s$

Solution en z : $z = Ce^{-(1-r)nt} + \dfrac{s}{n}$

Solution en y : $y = z^{\frac{1}{1-r}}$

On trouve finalement :

$$\boxed{y(t) = \left[Ce^{-(1-r)nt} + \frac{s}{n}\right]^{\frac{1}{1-r}}}$$

Corrigé ex. 48: Modèle Solow/CES

• Équation $y'(t) = s\Big[\big(a^2 - \dfrac{n}{s}\big)y(t) + 2\,a\,\sqrt{y(t)} + 1\Big]$

*NB : cette équation n'est pas à proprement parler du type Bernoulli à cause de la constante s. Elle constitue une variation du modèle de Solow/Cobb-Douglas : elle représente le modèle de Solow pour la fonction de production CES (*Constant Elasticity of Substitution*). Elle dépasse le cadre de ce cours mais on donne néanmoins ici une méthode de résolution pour les étudiants curieux...*

On commence par faire un changement de notation concernant les paramètres de cette équation. On pose :

$$\begin{cases} A = a - \sqrt{\dfrac{n}{s}} \\ B = a + \sqrt{\dfrac{n}{s}} \end{cases}$$

On remarque que $AB = a^2 - \dfrac{n}{s}$ et $A + B = 2a$. L'équation se factorise donc de la manière suivante :

$$y' = \frac{dy}{dt} = s(A\sqrt{y} + 1)(B\sqrt{y} + 1)$$

C'est une équation dite *séparable*, c'est-à-dire dont on peut séparer les variables dans deux termes différents, comme ceci (en mettant les y à gauche et les t à droite) :

$$\frac{dy}{(A\sqrt{y}+1)(B\sqrt{y}+1)} = s\,dt \tag{12}$$

On procède alors par intégration :

$$\int \frac{dy}{(A\sqrt{y}+1)(B\sqrt{y}+1)} = \int s\,dt \tag{13}$$

L'intégrale de gauche se calcule en décomposant la fonction de y à partir de l'identité suivante :

$$\frac{1}{A\sqrt{y}+1} - \frac{1}{B\sqrt{y}+1} = \frac{(B-A)\sqrt{y}}{(A\sqrt{y}+1)(B\sqrt{y}+1)}$$

On a $B - A = 2\sqrt{\dfrac{n}{s}}$, donc en multipliant les deux membres de l'équation (12) par $\sqrt{n/s}$, on obtient

$$\int \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{A\sqrt{y}+1} - \frac{1}{B\sqrt{y}+1}\right] dy = \int \sqrt{ns}\,dt$$

Par intégration, on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{A}\log(A\sqrt{y}+1) - \frac{1}{B}\log(B\sqrt{y}+1) = \sqrt{ns}\times t + C}$$

où C est une constante quelconque. On ne trouve pas une solution qui donne explicitement la solution $y(t)$ en fonction de t mais en quelque sorte le contraire (t en fonction de y !).

Si on prend maintenant l'exponentielle des deux membres de la relation précédente, on obtient :

$$\boxed{\left(A\sqrt{y}+1\right)^{\frac{1}{A}} \times \left(B\sqrt{y}+1\right)^{-\frac{1}{B}} = e^{t\sqrt{ns}+C} = De^{t\sqrt{ns}}}$$

avec $D = e^C$.

Si on suppose que y prend la valeur y_0 au temps $t = 0$, on calcule la constante $D = (A\sqrt{y_0}+1)^{\frac{1}{A}} \times (B\sqrt{y_0}+1)^{-\frac{1}{B}}$ et finalement :

$$\left[\frac{A\sqrt{y}+1}{A\sqrt{y_0}+1}\right]^{\frac{1}{A}} \times \left[\frac{B\sqrt{y}+1}{B\sqrt{y_0}+1}\right]^{-\frac{1}{B}} = e^{t\sqrt{ns}}$$

Corrigé ex. 49: Équations de Riccati

Les équations de Riccati sont de la forme :

$$y'(t) + a(t)\,y^2(t) + b(t)\,y(t) + c(t) = 0 \tag{14}$$

49-1) On posant $y = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{u'}{u}$. En dérivant, on obtient :

$$y' = \frac{a\,u\,u'' - u'(a'\,u + a\,u')}{a^2\,u^2}$$

En subsitutant ces expressions dans l'équation (14) et en simplifiant, on aboutit à l'équation suivante en u :

$$\boxed{a\, u'' + (ab - a')\, u' + a^2\, c\, u = 0} \tag{15}$$

C'est une équation linéaire homogène du second ordre. On cherche alors sa solution u et on en déduit y par le changement d'inconnue utilisé.

Lorsque la coefficient a est constant, l'équation se simplifie comme ceci :

$$\boxed{u'' + b\, u' + ac\, u = 0} \tag{16}$$

49-2) On applique cette technique aux équations différentielles de Riccati suivantes :

• Équation $y'(t) = y(t)^2 + m$

On a ici $a = -1$, $b = 0$ et $c = -m$. L'équation en u s'écrit donc :

$$u'' + mu = 0$$

Supposons que m soit positif. Le polynôme caractéristique $P(r) = r^2 + m$ a deux racines complexes conjuguées $r = \pm i\sqrt{m}$.

On obtient donc

$$u = k_1 \cos(t\sqrt{m}) + k_2 \sin(t\sqrt{m})$$

On en déduit

$$y = -\frac{u'}{u} = \frac{k_1 \sin(t\sqrt{m}) - k_2 \cos(t\sqrt{m})}{k_1 \cos(t\sqrt{m}) + k_2 \sin(t\sqrt{m})}$$

La condition initiale $y(0) = -2$ implique que $\dfrac{k_2}{k_1} = 2$. En divisant le numérateur et le dénominateur par k_1, on trouve finalement :

$$\boxed{y = \frac{\sin(t\sqrt{m}) - 2\cos(t\sqrt{m})}{\cos(t\sqrt{m}) + 2\sin(t\sqrt{m})}}$$

Si on suppose maintenant que m est négatif, le polynôme $P(r) = r^2 + m$ a deux racines réelles distinctes opposées r et $-r$ avec $r = \sqrt{-m}$. On obtient donc

$$u = k_1 e^{rt} + k_2 e^{-rt}$$

On en déduit

$$y = -\frac{u'}{u} = \frac{-rk_1 e^{rt} + rk_2 e^{-rt}}{k_1 e^{rt} + k_2 e^{-rt}}$$

En tenant compte de la condition initiale $y(0) = -2$, on trouve finalement :

$$\boxed{y = r\frac{-(r+2)e^{rt} + (r-2)e^{-rt}}{(r+2)e^{rt} + (r-2)e^{-rt}}}$$

• Équation $y'(t) = y(t)^2 - 2/t^2$

On a ici $a = -1$, $b = 0$ et $c = 2/t^2$. L'équation en u s'écrit donc :

$$u'' - \frac{2}{t^2}\, u = 0$$

On en déduit (en faisant un changement d'inconnue $u = \frac{v}{t}$) :

$$u = k_1\, t^2 + \frac{k_2}{t}$$

Finalement $y = -\frac{u'}{u}$ s'écrit :

$$\boxed{y = -\frac{2k_1\, t^3 - k_2}{t(k_1\, t^3 + k_2)}}$$

• Équation $y'(t) = b\, y(t) - a\, y(t)^2$

On a ici $a(t) = a$, $b(t) = -b$ et $c(t) = 0$. L'équation en u s'écrit donc :

$$u'' - b\, u' = 0$$

En intégrant membre à membre, on obtient :

$$u' - b\, u = C$$

C'est maintenant une équation d'ordre 1 qui conduit à une solution de la forme :

$$u = k_1\, e^{bt} + k_2$$

avec $k_2 = \frac{C}{1-b}$ si on suppose $b \neq 1$ (le cas $b = 1$ est laissé en exercice...).

Finalement la fonction $y = \frac{1}{a} \frac{u'}{u}$ s'écrit :

$$y = \frac{k_1\, e^{bt}}{k_1\, e^{bt} + k_2}$$

Avec une valeur initiale $y(0) = y_0$, on obtient :

$$\boxed{y = \frac{y_0\, e^{bt}}{1 - y_0 + y_0\, e^{bt}}}$$

• Remarque

L'équation différentielle précédente est qualifiée de *modèle logistique* ou encore *modèle de Verhulst*. C'est un système dynamique qui sert à modéliser la croissance d'une population. Pour plus d'information, voir la page Wikipedia : Modèle de Verhulst.